제11장 기저와 차원

11.1 1차결합

- **벡터공간(Vector Space)**

  - 집합 V의 모든 원소 $\{A, B, C, \cdots\}$와 스칼라 k, l에 대해 다음 공리를 만족
    $\Rightarrow$ V는 벡터공간(vector space)

벡터공간의 공리

1. $A \in V$, $B \in V$일 때, $A+B \in V$
2. $A+B=B+A$: 교환법칙
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$
4. 임의의 $A \in V$에 대해 다음을 만족시키는 영벡터 $O \in V$가 존재
   $O+A=A+O=A$: 항등원
5. 임의의 $A \in V$에 대해 다음을 만족시키는 음벡터 $-A \in V$가 존재
   $A+(-A)=(-A)+A=O$: 덧셈에 대한 역원
6. k가 임의의 스칼라이고 $A \in V$이면, $kA \in V$
7. $(kl)A=k(lA)$
8. $k(A+B)=kA+kB$
9. $(k+l)A=kA+lA$
10. $1A=A$

- **부분공간(Subspace)**

  - $S \subset V$가 벡터공간 V상에서 덧셈과 스칼라배에 대해 자체로서 벡터공간 형성
    $\Rightarrow$ 공집합이 아닌 S가 $S \subset V$이고, 다음의 공리를 만족시키는 경우
    $\Rightarrow$ 집합 S는 벡터공간 V의 부분공간(subspace)

부분공간의 공리

1. $A, B \in S$이면 $A+B \in S$
2. k가 임의의 스칼라이고 $A \in S$이면 $kA \in S$

• 1차결합(Linear Combination)

- $A_1, A_2, \cdots, A_n$가 벡터공간 V에 속하고 벡터이고, $k_1, k_2, \cdots, k_n$는 임의의 실수
  - ⇒ 벡터 A가 V의 원소와 $k_1, k_2, \cdots, k_n$에 대해 다음의 형식으로 표시
  - ⇒ 벡터 A는 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$의 1차결합(linear combination)

$$A = k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_nA_n$$

- 집합 S가 벡터공간 V의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$의 모든 1차결합으로 구성될 경우
  - ⇒ S의 모든 벡터가 V에 속하는 벡터들의 1차결합으로 표시되는 경우
  - ⇒ S는 V의 부분공간으로 생성공간(spanned space)
  - ⇒ 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$은 S를 생성(span)

【예제 11.1】 1차결합에 관한 예

- R^2벡터공간의 벡터 $(1, 1)$을 두 벡터 $(1, 2)$와 $(-1, 0)$의 1차결합으로 표시

$$(1,\ 1) = k_1(1,\ 2) + k_2(-1,\ 0) = (k_1 - k_2,\ 2k_1),\quad k_1 - k_2 = 1,\quad 2k_1 = 1$$

$$k_1 = \frac{1}{2},\quad k_2 = -\frac{1}{2},\quad \therefore\ (1,\ 1) = \frac{1}{2}(1,\ 2) - \frac{1}{2}(-1,\ 0)$$

- 벡터 $(1, 1)$을 두 벡터 $(1, 2)$와 $(0, 1)$의 1차결합으로 표시

$$(1,\ 1) = k_1(1,\ 2) + k_2(0,\ 1) = (k_1,\ 2k_1 + k_2),\quad k_1 = 1,\quad 2k_1 + k_2 = 1$$

$$k_1 = 1,\quad k_2 = -1,\quad \therefore\ (1,\ 1) = 1(1,\ 2) - 1(-1,\ 0)$$

■

【예제 11.2】 1차결합에 의해 표현되지 않는 예

- R^3벡터공간의 벡터 $(1, 2, 3)$을 $(1, 0, 1)$과 $(2, 0, -1)$의 1차결합으로 표시
  - ⇒ 두 번째 성분 $2 \neq 0$이므로 두 벡터의 1차결합으로 표시 불가

$$(1,\ 2,\ 3) = k_1(1,\ 0,\ 1) + k_2(2,\ 0,\ -1) = (k_1 + 2k_2,\ 0,\ k_1 - k_2)$$

$$k_1 + 2k_2 = 1,\quad 2 \neq 0,\quad k_1 - k_2 = 3$$

■

- R^n 벡터공간의 임의의 벡터 C를 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m$의 1차결합으로 표시
  $\Rightarrow$ 벡터 C와 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m$를 열벡터로 취급

$$C = k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_mA_m, \quad C = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$$

$$A_1 = (a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n}),\ A_2 = (a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n}),\ \cdots,\ A_m = (a_{m1},\ a_{m2},\ \cdots,\ a_{mn})$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad A_m = \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1a_{11} \\ k_1a_{12} \\ \vdots \\ k_1a_{1n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2a_{21} \\ k_2a_{22} \\ \vdots \\ k_2a_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} k_ma_{m1} \\ k_ma_{m2} \\ \vdots \\ k_ma_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_ma_{m1} \\ k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{m2} \\ \vdots \\ k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_ma_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

- 정리 4.7에서 알 수 있는 것처럼 위에 주어진 행렬방정식이 해를 가질 경우
  $\Rightarrow$ 행렬방정식의 계수행렬과 확대행렬의 계수가 동일

정리 11.1 1차결합의 성질

벡터 C를 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m$의 1차결합으로 표시하기 위한 필요충분조건
  $\Rightarrow$ 행렬방정식의 계수행렬의 계수와 확대행렬의 계수가 동일
  $\Rightarrow$ 행렬방정식은 유일해 또는 무수히 많은 해 보유

$$C = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n),\ A_1 = (a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n}),\ A_2 = (a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n})$$
$$,\ \cdots,\ A_m = (a_{m1},\ a_{m2},\ \cdots,\ a_{mn})$$

$$C = k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_mA_m, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} : \text{계수행렬}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} & c_2 \\ \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} & c_n \end{bmatrix} : \text{확대행렬}$$

【예제 11.3】 벡터 $(3,\ -1,\ -2,\ 0)$은 다음 세 벡터의 1차결합으로 표시할 수 있는가?

- 아래에서 보는 바와 같이 확대행렬의 계수와 계수행렬의 계수가 3으로 동일
  $\Rightarrow$ $(3,\ -1,\ -2,\ 0)$을 세 벡터의 1차결합으로 표시 가능

$(1,\ 0,\ 0,\ 1),\quad (-1,\ 1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 0,\ -1,\ -1)$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]}_{R_{1,4}(-1)} \Rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R_{2,4}(-1)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R_3(-1),\ R_4(-1)} \Rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{R_{3,4}(-1)}$$

$$(3,\ -1,\ -2,\ 0) = 2(1,\ 0,\ 0,\ 1) + (-1)(-1,\ 1,\ 0,\ 0) + 2(0,\ 0,\ -1,\ -1)$$

■

【예제 11.4】 기본벡터 $E_1,\ E_2,\ E_3$의 1차결합으로 임의의 벡터 표시

- R^3공간의 벡터 $C=(a,\ b,\ c)$는 기본벡터 $E_1,\ E_2,\ E_3$의 1차결합으로 표시 가능
  $\Rightarrow$ $C = aE_1 + bE_2 + cE_3$

$E_1 = (1,\ 0,\ 0),\quad E_2 = (0,\ 1,\ 0),\quad E_3 = (0,\ 0,\ 1)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 와 $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$ 의 계수는 3으로 동일

■

【예제 11.5】 벡터 $(1,\ 2,\ 3,\ 2)$은 다음 세 벡터의 1차결합으로 표시할 수 있는가?

- 계수행렬의 계수는 3이고, 확대행렬의 계수는 4이므로 1차결합으로 표시 불가

$(1,\ 1,\ 1,\ 1),\quad (1,\ 0,\ 1,\ 1),\quad (1,\ 1,\ 0,\ 1)$

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: 기약가우스행렬

■

11.2 벡터들의 1차독립성

• 1차독립과 1차종속

- 벡터공간 V의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$에 대한 다음의 식 (11.1)을 만족시키는 조건

  $\Rightarrow$ $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$인 경우에만 항등식이 성립하는 경우

  $\Rightarrow$ 벡터방정식이 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$의 유일해를 갖는 경우

  $\Rightarrow$ 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$는 1차독립(linearly independent)

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_n A_n = O \tag{11.1}$$

- $k_1 \neq 0$ 또는 $k_2 \neq 0$ 또는 $\cdots$ 또는 $k_n \neq 0$일 때도 식 (11.1)이 성립하는 경우

  $\Rightarrow$ 식 (11.1)을 만족시키는 0이 아닌 계수가 존재하는 경우

  $\Rightarrow$ 식 (11.1)의 벡터방정식이 무수히 많은 해를 갖는 경우

  $\Rightarrow$ 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$는 1차종속(linearly dependent)

【예제 11.6】 벡터의 1차종속에 관한 예

- R^2벡터공간의 두 벡터 $(1,\ -3)$과 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$은 1차종속 관계

$$(1,\ -3) + (-2)\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right) = (0,\ 0) = O, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2$$

■

【예제 11.7】 벡터의 1차독립에 관한 예

- R^2벡터공간의 두 벡터 $(1,\ -3)$과 $(1,\ -2)$는 1차독립 관계

$$k_1(1,\ -3) + k_2(1,\ -2) = (k_1 + k_2,\ -3k_1 - 2k_2) = (0,\ 0) = O$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ -3k_1 - 2k_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2k_1 + 2k_2 = 0 \\ -3k_1 - 2k_2 = 0 \end{cases}, \quad -k_1 = 0, \quad k_1 = 0$$

$$\therefore \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

■

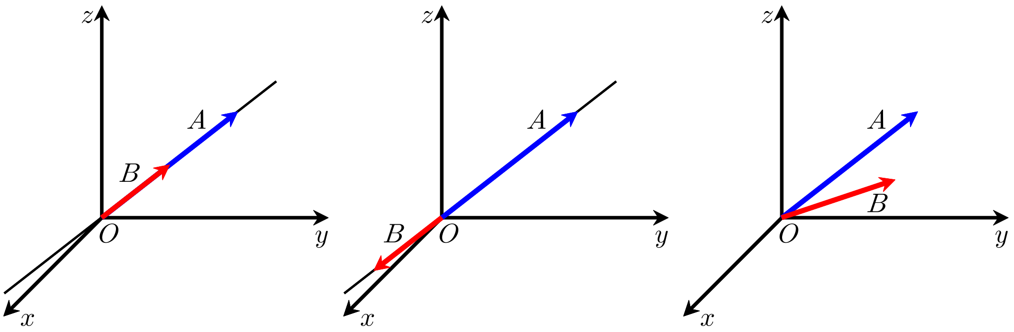
【예제 11.8】 세 벡터 A, B, C가 1차독립이면 $A+B$, $B+C$, $C+A$도 1차독립

$$k_1(A+B)+k_2(B+C)+k_3(C+A)=O$$
$$k_1A+k_1B+k_2B+k_2C+k_3C+k_3A=O$$
$$(k_1+k_3)A+(k_1+k_2)B+(k_2+k_3)C=O$$
$$k_1+k_3=k_1+k_2=k_2+k_3=0, \quad \therefore\ k_1=k_2=k_3=0$$

■

- **1차독립에 대한 기하학적 해석**

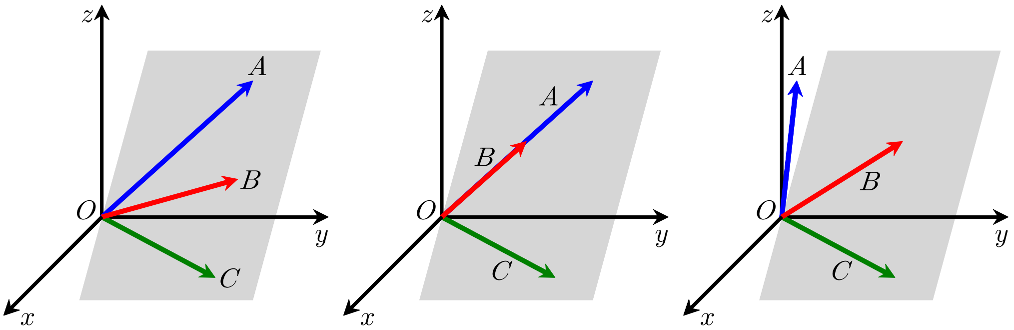
- 두 벡터의 시작점을 원점에 일치시켰을 때 동일 직선상에 놓이지 않는 경우
  ⇒ 두 벡터는 1차독립 [그림 11.1(c)]



(a) 1차종속 (b) 1차종속 (c) 1차독립

그림 11.1 R^2 및 R^3공간에서의 1차종속과 1차독립

- 세 벡터의 시작점을 원점에 일치시켰을 때 동일 평면상에 놓이지 않는 경우
  ⇒ 세 벡터는 1차독립 [그림 11.2(c)]



(a) 1차종속 (b) 1차종속 (c) 1차독립

그림 11.2 R^2 및 R^3공간에서의 1차종속과 1차독립

정리 11.2 1차종속의 성질 1

$A_1, A_2, \cdots, A_n$중의 임의의 벡터를 나머지 벡터의 1차결합으로 표시 가능
$\Rightarrow$ n개의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$은 1차종속

- $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 1차종속이면 다음 1차결합식의 계수중 0이 아닌 실수가 존재
  $\Rightarrow$ 임의의 i번째 벡터 A_i의 계수 $k_i \neq 0$일 경우

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_iA_i + \cdots + k_nA_n = O, \quad k_i \neq 0, \quad c_n = -\frac{k_n}{k_i}$$

$$k_iA_i = -k_1A_1 - k_2A_2 - \cdots - k_{i-1}A_{i-1} - k_{i+1}A_{i+1} - \cdots - k_nA_n$$

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{k_1}{k_i}A_1 - \frac{k_2}{k_i}A_2 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}A_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}A_{i+1} - \cdots - \frac{k_n}{k_i}A_n \\ &= c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_{i-1}A_{i-1} + c_{i+1}A_{i+1} + \cdots c_nA_n \end{aligned}$$

따름정리

$A_1, A_2, \cdots, A_n$중의 임의의 벡터를 나머지 벡터의 1차결합으로 표시 불가
$\Rightarrow$ n개의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$은 1차독립

정리 11.3 1차독립의 성질 1

$A_1, A_2, \cdots, A_n$을 열벡터로 하는 행렬 A에 대해 $AX = O$의 유일해$X = O$
$\Rightarrow$ R^n벡터공간의 n개의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$은 1차독립

- $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 1차독립이면 식 (11.2)의 유일해는 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_nA_n = O \tag{11.2}$$

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \ A_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \ \cdots, \ A_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn})$$

$$X = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = O$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = O, \text{ 동차연립방정식의 유일해는 } X = O$$

정리 11.4 1차독립의 성질 2

n개의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$을 열벡터로 하는 행렬 A에 대해 $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ R^n벡터공간의 n개의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$은 1차독립

$$\det A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{vmatrix} \neq 0$$

- 다음 행렬 A를 계수행렬로 하는 행렬방정식이 유일해를 가질 경우
  $\Rightarrow$ 계수행렬이 역행렬을 가져야 하므로 $\det A \neq 0$

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

정리 11.5 1차종속의 성질 2

R^n공간에서 벡터의 개수가 n보다 많은 경우 벡터들은 1차종속

정리 11.6 n차원 벡터공간

n개 미만의 벡터로는 n차원 벡터공간 V를 생성 불가

• **소행렬(Submatrix)**

- 행렬을 수 개의 행과 열로 분할하여 각각의 분할된 성분으로 이루어진 행렬
  $\Rightarrow$ 소행렬(submatrix)
- M이 $(m\times n)$행렬일 때 행렬 M에서 i개의 행을 취하여 $(i\times n)$행렬을 구성
  $\Rightarrow$ $(i\times n)$행렬에서 다시 j개의 열을 뽑아 $(i\times j)$행렬을 구성
  $\Rightarrow$ $(i\times j)$행렬이 행렬 M의 소행렬, $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$

정리 11.7 1차독립의 성질 3

R^n공간에서 $m<n$인 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_m$을 열벡터로 하는 $(n\times m)$행렬
$\Rightarrow$ $A=[A_1\ A_2\ \cdots\ A_m]$
행렬 A의 $(m\times m)$소행렬중 행렬식이 0이 아닌 것이 적어도 하나 존재
$\Rightarrow$ 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_m$은 1차독립

【예제 11.9】R^3공간의 기본단위벡터 $E_1,\ E_2,\ E_3$는 1차독립 [정리 11.4]

$$E_1=(1,\ 0,\ 0),\quad E_2=(0,\ 1,\ 0),\quad E_3=(0,\ 0,\ 1)$$
$$E=[E_1\ E_2\ E_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \det E=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1(\neq 0)$$

■

【예제 11.10】1차독립인 벡터의 예 [정리 11.4]

$$A=(-1,\ 0,\ 0),\quad B=(2,\ 2\pi,\ 0),\quad C=(-29,\ -7,\ -1)$$
$$|A\ B\ C|=\begin{vmatrix}-1&2&-29\\0&2\pi&-7\\0&0&-1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}2\pi&-7\\0&-1\end{vmatrix}=2\pi(\neq 0)$$

■

【예제 11.11】 1차종속인 벡터의 예 [정리 11.4]

$$A=(1,\ \sqrt{2},\ -1),\quad B=(\frac{1}{2},\ 0,\ 3),\quad C=(0,\ -\sqrt{2},\ 7)$$

$$|A\ B\ C|=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 3 & 7 \end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=3\sqrt{2}-\frac{6}{2}\sqrt{2}=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0$$

■

【예제 11.12】 1차독립인 벡터의 예 [정리 11.7]

- 두 벡터를 열벡터로 하는 행렬의 1행과 2행을 성분으로 하는 소행렬을 고려
  ⇒ 소행렬의 행렬식의 값이 0이 아니므로 두 벡터는 1차독립

$$A=(1,\ 2,\ 3,\ -1),\quad B=(\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2})$$

$$[A\ B]=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3/2 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1(\neq 0)$$

■

【예제 11.13】 세 벡터 $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(-1, 2, x)$가 한 평면에 있을 조건

- 세 벡터가 한 평면에 있으면 한 벡터가 다른 두 벡터의 1차결합으로 표시
  ⇒ 세 벡터가 한 평면에 있으면 세 벡터는 1차종속 관계
  ⇒ 세 벡터를 열벡터로 하는 행렬의 행렬식의 값이 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}}_{R_{1,2}(-1)}=\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & x+1 \end{vmatrix}}_{R_{1,3}(-1)}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=x-5$$

$$x-5=0,\qquad \therefore\quad x=5$$

■

11.3 벡터공간의 기저와 차원

• 기저(Basis)

- R^n벡터공간 V의 영벡터 O가 아닌 n개의 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 1차독립
  - $\Rightarrow$ V의 임의의 벡터는 $A_1, A_2, \cdots, A_n$의 1차결합으로 표시 가능
  - $\Rightarrow$ 벡터 $A_1, A_2, \cdots, A_n$은 벡터공간 V의 기저(basis)

【예제 11.14】 R^3공간의 기저를 형성하는 기본벡터

- R^3공간에서 기본단위벡터 $E_1=(1, 0, 0)$, $E_2=(0, 1, 0)$, $E_3=(0, 0, 1)$은 1차독립
  - $\Rightarrow$ R^3의 임의의 벡터는 E_1, E_2, E_3의 1차결합으로 표시 [예제 11.4]
  - $\Rightarrow$ 세 벡터 E_1, E_2, E_3는 R^3공간의 기저를 형성

■

【예제 11.15】 R^3공간에서 $A=(1, 0, 0)$, $B=(0, 1, 0)$, $C=(1, 0, 1)$가 기저가 됨을 증명

- 행렬방정식의 계수행렬에 대한 행렬식이 0이 아니므로 세 벡터는 1차독립

$$[A\ \ B\ \ C]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1(\neq 0)$$

- R^3공간의 임의의 벡터 $X=(a, b, c)$를 A, B, C의 1차결합으로 표시 가능
  - $\Rightarrow$ 계수행렬의 계수와 확대행렬의 계수가 동일 [정리 11.1]

$$[A\ \ B\ \ C]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \text{ : 계수행렬의 계수는 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\end{array}\right]=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a-c\\0&1&0&b\\0&0&1&c\end{array}\right]}_{R_{3,1}(-1)} \text{ : 확대행렬의 계수는 3}$$

- 계수행렬과 확대행렬의 계수가 동일하므로 A, B, C는 R^3공간의 기저

■

• **표준기저(Standard Basis)**

- R^n공간에서 기본단위벡터 E_1, E_2, $\cdots$, E_n은 R^n벡터공간의 기저를 형성
  $\Rightarrow$ $E_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $E_2 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $E_n = (0, 0, \cdots, 1)$
  $\Rightarrow$ 표준기저(standard basis)

정리 11.8 기저의 수

벡터공간 V를 생성하는 기저 벡터의 수는 일정
$\Rightarrow$ R^n공간의 기저 벡터의 수는 n

• **차원(Dimension)**

- 벡터공간 V를 생성하는 기저의 수를 V의 차원으로 정의하며, $\dim V$로 표시
  $\Rightarrow$ 영벡터공간 $V = \{0\}$의 차원은 $\dim V = 0$으로 정의

정리 11.9 벡터공간의 차원

R^n벡터공간의 차원은 n, $\dim R^n = n$

정리 11.10 덧셈/뺄셈 정리

집합 S를 벡터공간 V의 하나 이상의 벡터로 구성된 집합
$\Rightarrow$ S는 1차독립인 집합이라 가정

(1) $v \in V$를 S내의 벡터들에 의해 생성되지 않는 벡터라 가정
$\Rightarrow$ v와 S를 더하여 얻어진 집합은 1차독립
(2) $v \in S$가 집합 S내의 다른 벡터들의 1차결합으로 표현될 경우
$\Rightarrow$ S에서 v를 뺀 집합은 S와 동일한 공간을 생성

- R^3공간에서 1차독립인 두 개의 벡터는 원점을 통과하는 평면을 생성
  - ⇒ 그림 11.3(a)와 같이 평면 외부에 다른 벡터 A를 추가할 경우
  - ⇒ 세 벡터는 동시에 한 평면 위에 놓이지 않으므로 1차독립
- 그림 11.3(b), (c)에서 R^3공간의 원점을 통과하는 평면상의 세 벡터를 고려
  - ⇒ (b)에서 하나의 벡터를 제거해도 나머지 두 벡터가 평면을 생성
  - ⇒ (c)에서 벡터 A나 B를 제거해도 나머지 두 벡터가 평면을 생성

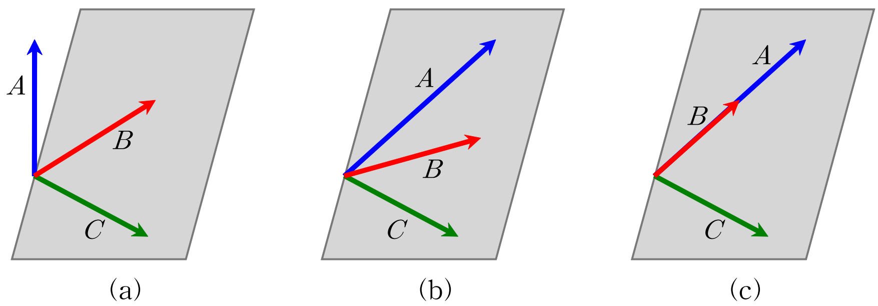


그림 11.13 뎃셈/뺄셈의 정리 예

정리 11.11 기저의 성질 1

V가 n차원 벡터공간이고, S는 V내의 n개의 벡터들로 구성된 집합
⇒ S가 V를 생성하거나 1차독립이면, S는 V의 기저

정리 11.12 기저의 성질 2

집합 S를 유한차원 벡터공간 V의 벡터들로 구성된 집합일 경우

(1) S가 V를 생성하지만 기저가 아니면 S에서 적절한 벡터를 제거
⇒ 벡터공간 V에 대한 기저를 형성
(2) S가 1차독립이지만 V의 기저가 아니면 S에 적절한 벡터를 추가
⇒ 벡터공간 V에 대한 기저를 형성

정리 11.13 벡터공간 차원의 성질 1

집합 S가 벡터공간 V의 부분공간이면, $\dim S \le \dim V$ 가 성립

정리 11.14 벡터공간 차원의 성질 2

집합 S가 벡터공간 V의 부분공간이고, $\dim S = \dim V$이면 $S = V$

【예제 11.16】 R^4벡터공간의 부분공간 $S=\{(x, y, z, 0) : x, y, z \in R\}$의 기저와 차원

- S의 임의의 원소 $A=(x,\ y,\ z,\ 0)$을 다음과 같이 표시

$$\begin{aligned} A &= (x,\ y,\ z,\ 0) = (x,\ 0,\ 0,\ 0) + (0,\ y,\ 0,\ 0) + (0,\ 0,\ z,\ 0) \\ &= x(1,\ 0,\ 0,\ 0) + y(0,\ 1,\ 0,\ 0) + z(0,\ 0,\ 1,\ 0) \\ &= x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A_s = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad \det A_s = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 1(\neq 0)$$

- 계수행렬에 대한 (3×3)소행렬의 행렬식이 0이 아니므로 1차독립 [정리 11.6]
  - $\Rightarrow$ $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$은 부분공간 S의 기저
  - $\Rightarrow$ 1차독립인 기저 벡터가 세 개이므로 $\dim S=3$

■

【예제 11.17】 집합 $S=\{(x+y, 0, x-y) : x, y \in R\}$의 차원

- S는 R^3벡터공간의 부분공간이며, S의 임의의 원소 A를 다음과 같이 표시

$$\begin{aligned} A &= (x+y,\ 0,\ x-y) = (x,\ 0,\ x) + (y,\ 0,\ -y) \\ &= x(1,\ 0,\ 1) + y(1,\ 0,\ -1) \\ &= x\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\0&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A_s = \begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}, \quad \det A_s = \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix} = -2(\neq 0)$$

- 계수행렬에 대한 (2×2)소행렬의 행렬식이 0이 아니므로 1차독립 [정리 11.6]
  - $\Rightarrow$ $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$은 부분공간 S의 기저를 형성
  - $\Rightarrow$ 1차독립인 기저 벡터가 두 개이므로 $\dim S=2$

■

11.4 행공간, 열공간, 영공간

• 행벡터와 열벡터

- $(m \times n)$행렬 A의 각 행의 성분들로 이루어진 R^n공간상의 벡터
  $\Rightarrow$ 행렬 A에 대한 행벡터(row vector)
- $(m \times n)$행렬 A의 각 열의 성분들로 이루어진 R^m공간상의 벡터
  $\Rightarrow$ 행렬 A에 대한 열벡터(column vector)

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (m \times n)\text{행렬}, \quad \begin{cases} i : \text{행} \\ j : \text{열} \end{cases}$$

$$r_1 = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \cdots \;\; a_{1n}], \; r_2 = [a_{21} \;\; a_{22} \;\; \cdots \;\; a_{2n}], \; \cdots, \; r_m = [a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \cdots \;\; a_{mn}]$$

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

【예제 11.18】 행벡터와 열벡터의 예

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = [2 \;\; 1 \;\; 0], \quad r_2 = [3 \;\; -1 \;\; 4]$$

■

• 행렬의 부분공간

- A가 $(m \times n)$행렬일 때 A의 행벡터에 의해서 생성되는 R^n의 부분공간
  $\Rightarrow$ 행공간(row space)
- A가 $(m \times n)$행렬일 때 A의 열벡터에 의해서 생성되는 R^m의 부분공간
  $\Rightarrow$ 열공간(column space)
- 동차연립방정식 $AX = O$의 해벡터로 구성되는 R^n의 부분공간(해공간)
  $\Rightarrow$ 영공간(null space), $\mathrm{Ker}(A)$

- 다음의 행렬 A의 열벡터와 벡터 X의 성분의 1차결합으로 AX를 표시
  $\Rightarrow$ A의 열벡터와 벡터 X의 성분의 1차결합으로 $AX=B$를 표시

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad A_c=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$AX=A_cX=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1c_1+x_2c_2+\cdots+x_nc_n$$

$$AX=B \quad\Rightarrow\quad x_1c_1+x_2c_2+\cdots+x_nc_n=B$$

정리 11.15 연립방정식의 해와 열공간

일차연립방정식 $AX=B$가 근을 가지면 B가 A의 1차결합으로 표시
  $\Rightarrow$ 연립방정식 $AX=B$가 해를 갖기 위한 필요충분조건
  $\Rightarrow$ 벡터 B가 행렬 A의 열공간에 포함

【예제 11.19】 연립방정식 $AX=B$의 해와 열공간의 관계

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$[A \ \vdots\ B]=\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right]\Rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right]}_{R_1(-1)}\Rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 7 & 2 & -1 \end{array}\right]}_{R_{1,2}(-1),\ R_{1,3}(-2)}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 17/5 & 51/5 \end{array}\right]}_{R_{2,3}(-7/5)}\Rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]}_{R_3(5/17)}\Rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]}_{R_{3,2}(1),\ R_{3,1}(2)}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]}_{R_2(1/5)}\Rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]}_{R_{2,1}(3)},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=B,\quad 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

■

정리 11.17 기본행연산과 영공간

주어진 행렬에 어떤 기본행연산을 적용해도 행렬의 영공간은 불변

정리 11.18 기본행연산과 행공간

주어진 행렬에 어떤 기본행연산을 적용해도 행렬의 행공간은 불변

【예제 11.21】기본행연산과 열공간

- 행렬 A에 대한 열공간은 $\{(t,\ 2t)\ :\ t \in R\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- 행렬 A에 $R_{1,2}(-2)$를 적용한 행렬을 B의 열공간은 $\{(t,\ 0)\ :\ t \in R\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 행렬에 기본행연산을 적용했을 때 행렬에 대한 열공간은 변화 가능

■

정리 11.19 연립방정식의 해와 열공간

행렬 A와 행렬 B가 행동치이면 다음의 정리가 성립

(1) 행렬 A의 열벡터가 1차독립이면 행렬 B의 열벡터도 1차독립
(2) 행렬 A의 열벡터로 구성된 집합이 A의 열공간에 대한 기저
$\Rightarrow$ B의 열벡터로 구성된 집합이 B의 열공간에 대한 기저

정리 11.20 행공간 및 열공간에 대한 기저

행렬 R이 가우스행렬이면 선도 1을 포함하는 행벡터는 행공간의 기저
$\Rightarrow$ 선도 1을 포함하는 열벡터는 R의 열공간에 대한 기저

【예제 11.22】가우스행렬과 행공간 및 열공간에 대한 기저

- 가우스행렬 R에서 선도 1을 포함하는 열벡터 c_1, c_2, c_3는 열공간에 대한 기저
  $\Rightarrow$ 선도 1을 포함하는 행벡터 r_1, r_2, r_3는 R의 행공간에 대한 기저

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = [1 \;\; -2 \;\; 5 \;\; 0 \;\; 3], \quad r_2 = [0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 0], \quad r_3 = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$$

■

정리 11.21 행공간과 열공간의 차원

임의의 행렬 A에 대한 행공간의 차원과 열공간의 차원은 동일

- **계수와 퇴화차수**

- 행렬 A에 대한 행공간의 차원 및 동일한 값의 열공간의 차원
  $\Rightarrow$ A의 계수(rank), $\mathrm{rank}(A)$
- 행렬 A의 영공간의 차원 $\Rightarrow$ A의 퇴화차수(nullity), $\mathrm{nullity}(A)$

【예제 11.23】행렬의 계수와 퇴화차수

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{R_{1,2}(-1)} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}}_{R_{1,3}(-3)} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_{2,3}(-1)}$$

$$\mathrm{rank}(A) = 2, \quad \mathrm{nullity}\ (A) = 1$$

■

정리 11.22 전치행렬의 계수

행렬 A의 계수와 전치행렬 A^T의 계수는 동일, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$

정리 11.23 행렬의 차원정리

A가 n개의 열을 가지고 있는 임의의 행렬이면 다음의 관계가 성립

$\Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = n$

따름정리

$(m \times n)$행렬 A에 대해서 다음의 성질이 성립

(1) $\mathrm{rank}(A)$는 일차연립방정식 $AX = O$에서 선도변수의 수와 동일
(2) $\mathrm{nullity}(A)$는 $AX = O$의 일반해에서의 자유변수의 수와 동일

정리 11.24 행렬의 계수와 정칙행렬

$(n \times n)$행렬 A의 역행렬이 존재(A는 정칙행렬)하면 다음의 관계 성립

$\Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) = n$