

| 제 1 장 |

세기의 방법

수학에서는 물론 다른 자연과학이나 실생활에서 우리는 어떤 것을 세어야 할 때가 많다. 어떤 것을 센다는 것은 자연수를 이용하여 세려고 하는 대상에 1부터 차례로 번호를 매기는 것이므로 세기에서 가장 좋은 방법은 세려고 하는 대상을 일렬로 나열하고 나열된 것을 처음부터 차례로 세어나가는 것이다. 그러나 나열할 것이 너무 많거나 주어진 조건이 까다로워 일일이 나열하기 쉽지 않을 때가 많다. 이 장에서는 주어진 조건에 맞는 대상을 효과적으로 나열할 수 있는 방법과 일일이 나열하지 않고 셀 수 있는 여러 가지 방법에 대하여 알아본다. 또 일정한 조건을 만족하는 대상을 정확히 셀 수 없는 경우에는 그 조건을 만족하는 대상이 하나라도 존재할 수 있는지에 대한 존재성을 살펴본다.

제1절 기본적인 세기 방법

이 절에서는 주어진 집합의 원소의 개수를 셀 때, 기본이 되는 합의 법칙과 곱의 법칙에 대하여 알아본다.

예제 1.1.1 다음 물음에 답하여라.

- (1) 1과 20사이의 정수 중에서 3 또는 7의 배수의 개수를 구하여라.
- (2) 1과 50사이의 정수 중에서 3 또는 7의 배수의 개수를 구하여라.

풀이>> (1) 3의 배수는 3, 6, 9, 12, 15, 18의 여섯 개이고 7의 배수는 7, 14의 둘이며 서로 겹치는 것이 없으므로 3 또는 7의 배수의 개수는 8개이다.
 (2) 3의 배수는 3, 6, ..., 48의 16개이고 7의 배수는 7, 14, ..., 49의 7개이다.
 이 중 서로 겹치는 것은 21, 42의 둘이므로 3 또는 7의 배수의 개수는 $16 + 7 - 2 = 21$ 개이다. □

문제 1.1.1

주사위를 한 번 던질 때 다음에 답하여라.

- (1) 짝수 또는 5의 배수가 나오는 경우의 수를 구하여라.
- (2) 짝수 또는 소수가 나오는 경우의 수를 구하여라.

정리 1.1.1 (합의 법칙)

- (1) 두 조건 α, β 를 만족하는 경우의 수가 각각 m, n 이고 α 와 β 를 동시에 만족하는 경우가 없다면 조건 α 또는 β 를 만족하는 경우의 수는 $m + n$ 이다.
- (2) 두 조건 α, β 를 만족하는 경우의 수가 각각 m, n 이고 α 와 β 를 동시에 만족하는 경우의 수가 k 이면 조건 α 또는 β 를 만족하는 경우의 수는 $m + n - k$ 이다.

두 집합 A, B 에 대해 $A \cap B = \emptyset$ 이면

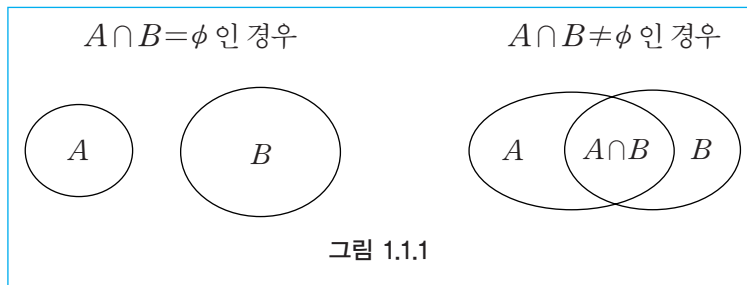
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

이다. 여기서 $|A|$ 는 집합 A 의 원소의 개수를 나타낸다.

일반적으로는

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

이다.



□

예제 1.1.2 1부터 100까지의 자연수 중에서 다음을 구하여라.

- (1) 짝수이거나 4로 나누어 나머지가 1인 자연수의 개수
- (2) 짝수이거나 3으로 나누어 나머지가 1인 자연수의 개수

풀이>> (1) 1부터 100까지의 자연수 중에서 짝수는 $2, 4, 6, \dots, 100 = 2 \times 50$ 의 50개가 있고 4로 나누어 나머지가 1이 되는 자연수는

$$1, 5, 9, \dots, 97 = 4 \times 24 + 1$$

의 25개가 있다. 4로 나누어 나머지가 1이며 짝수인 자연수는 없다. 따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $50 + 25 = 75$ 이다.

- (2) 1부터 100까지의 자연수 중에서 짝수는 50개이고 3으로 나누어 나머지가 1이 되는 자연수는

$$1, 4, 7, 10, \dots, 100 = 3 \times 33 + 1$$

의 34개가 있다. 두 조건을 동시에 만족하는 자연수는 3으로 나누어 나머지

가 1인 짝수이므로 $6k+4$ 의 꼴이다. 1부터 100까지의 자연수 중에서 $6k+4$ 의 꼴은 다음의 17개이다.

$$4, 10, 16, \dots, 100 = 6 \times 16 + 4$$

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $50 + 34 - 17 = 67$ 이다. $\square$

문제 1.1.2

50명이 정원인 어느 대학 수학과 학생 중에 미분방정식과 이산수학을 수강하는 학생은 각각 32명과 40명이다. 두 과목 모두 수강하는 학생수의 범위를 구하여라.

예제 1.1.3 문자 a, a, b, c 를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각하여 보자.

① a 로 시작하는 경우

$aabc, aacb, abac, abca, acab, acba$: 6가지

② b 로 시작하는 경우

$baac, baca, bcaa$: 3가지

③ c 로 시작하는 경우

$caab, caba, cbac$: 3가지

문자 a, a, b, c 로 이루어지는 배열은 위의 세 경우 중 하나이고 이 세 경우를 동시에 만족하는 배열은 없으므로 합의 법칙에 의해 $6 + 3 + 3 = 12$ 가지이다. $\square$

문제 1.1.3

문자 a, a, b, c 를 일렬로 나열하는 방법의 가지수를 구하기 위해 다음과 같이 네 단계로 나누어서 생각하였다. 잘못 생각한 단계를 찾아라.

a	×	×	×
×	a	×	×
×	×	a	×
×	×	×	a

그림 1.1.2

- (1단계) 모든 경우는 그림 1.1.2와 같은 4가지 경우 중 하나이다.
 (2단계) 각 경우에 대하여 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 방법은 모두 6가지이다.
 (3단계) 위 네 경우 사이에는 서로 공통이 없다.
 (4단계) 따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $6+6+6+6=24$ 가지이다.

주어진 조건을 만족하는 경우의 수를 구하기 위하여 때때로 여집합을 이용한다. X 를 전체 집합이라 하고 A, B 를 각각 조건 α, β 를 만족하는 X 의 부분집합이라 하자. 그러면 조건 α 와 β 모두 만족하지 않는 경우의 수는

$$\begin{aligned} |A^c \cap B^c| &= |(A \cup B)^c| = |X - A \cup B| \\ &= |X| - |A \cup B| = |X| - (|A| + |B|) + |A \cap B| \end{aligned}$$

이다.

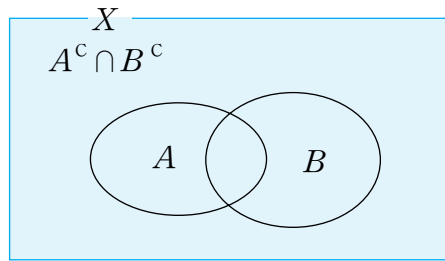


그림 1.1.3

예제 1.1.4 문자 a, b, c, d를 일렬로 나열할 때 a와 b가 서로 이웃하지 않는 경우의 수를 구하여라.

풀이>> a 바로 뒤에 b가 나오는 배열은 abcd, abdc, cabd, dabc, cdab, dcab의 6가지이고, 마찬가지로 b 바로 뒤에 a가 나오는 경우의 수도 6이다. 이 두 경

우 사이에는 공통이 없으므로 구하는 경우의 수는 a, b, c, d 를 일렬로 나열한 모든 경우의 수에서 a 바로 뒤에 b 가 나오는 경우의 수와 b 바로 뒤에 a 가 나오는 경우의 수를 뺀 $24 - 6 - 6 = 12$ 이다. $\square$

문제 1.1.4

1부터 100까지의 자연수 중에 100과 서로 소인 자연수의 개수를 구하여라.
(힌트 : $100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수의 개수를 구하면 된다.)

예제 1.1.5 동전을 던질 때 앞면이 나오면 H, 뒷면이 나오면 T라 표시하자. 이제 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 던져 주사위의 숫자가 1이고 동전의 앞면이 나왔다면 (1, H)로 나타낸다. 이와 같은 방법으로 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 던질 때 나올 수 있는 모든 경우를 나타내고 그 경우의 수를 구하여라.

풀이>> (1, H), (2, H), (3, H), (4, H), (5, H), (6, H)
(1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)

따라서 위의 조건을 만족하는 경우의 수는 12이다. $\square$

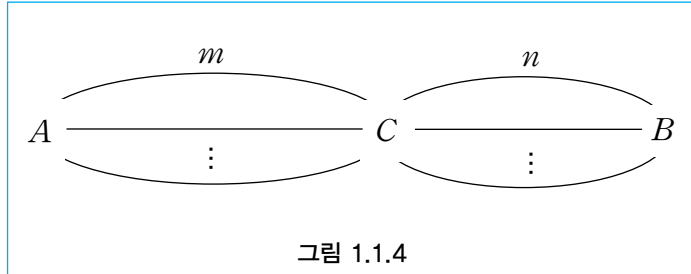
문제 1.1.5

크기가 다른 두 개의 주사위를 던져 큰 주사위의 숫자가 1이고 작은 주사위의 숫자가 2라면 (1, 2)로 나타낸다. 이와 같은 방법으로 크기가 다른 두 개의 주사위를 던질 때 나올 수 있는 모든 경우를 나타내고 그 경우의 수를 구하여라.

정리 1.1.2 (곱의 법칙)

조건 α 를 만족하는 경우의 수가 m 이고, 조건 α 를 만족하는 각 경우에 대해 조건 β 를 만족하는 경우의 수가 n 이라면 두 조건 α, β 를 만족하는 경우의 수는 mn 이다.

곱의 법칙은 다음 그림 1.1.4와 같이 한 지점 A에서 B로 가는 방법의 가지수는 A에서 C까지 가는 경우의 수 m 과 C에서 B까지 가는 경우의 수 n 을 곱한 mn 임을 뜻한다.



또 곱의 법칙은 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 라 하면

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

인 것을 뜻하며, 마찬가지로 세 집합 A, B, C 에 대해서도

$$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$$

임을 뜻한다. □

예제 1.1.6 자연수 n 이 다음과 같이 소인수분해될 때 n 의 약수의 개수를 구하여라.

$$n = p^a q^b r^c \quad (p, q, r \text{은 서로 다른 소수})$$

풀이>> n 의 약수는

$$p^i q^j r^k \quad (0 \leq i \leq a, 0 \leq j \leq b, 0 \leq k \leq c)$$

꼴이다. i 는 $0, 1, 2, \dots, a$ 중의 한 수이므로 i 를 선택할 수 있는 방법은 $(a+1)$ 가지이다. 마찬가지로 방법으로 j 와 k 를 각각 $(b+1), (c+1)$ 가지 방법으로 선택할 수 있으므로 n 의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$(a+1)(b+1)(c+1)$$

이다. □

문제 1.1.6

집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{0, 1\}$ 로 가는 모든 함수의 개수를 구하여라.

예제 1.1.7 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 모든 부분집합의 개수는 2^n 임을 보여라.

풀이>> A 의 부분집합에는 1이 포함될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있으므로 2가지 경우가 있다. 마찬가지로 2, 3, $\dots$, n 에 대하여도 각각 2가지 경우가 있으므로 곱의 법칙에 의하여 $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ 개의 부분집합이 있다. $\square$

문제 1.1.7

집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 1을 포함하는 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.
- (2) 1은 포함하고 2는 포함하지 않는 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

예제 1.1.8 책꽂이에 한글로 쓰여진 책 여덟 종류, 불어로 쓰여진 책 여섯 종류, 영어로 쓰여진 책 다섯 종류의 책이 꽂혀 있다. 이 중에서 서로 다른 언어로 쓰여진 두 권의 책을 뽑는 방법의 수를 구하여라.

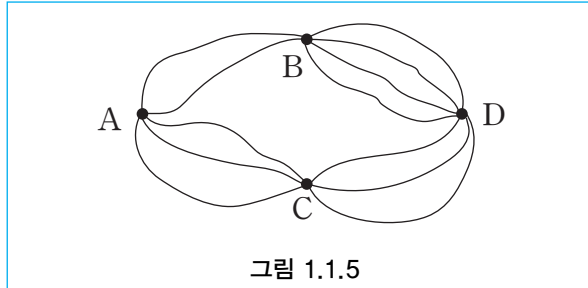
풀이>> 다음과 같이 세 경우로 나누어 보자.

- ① 한글책과 불어책을 뽑는 경우 : 곱의 법칙을 이용하여 $8 \times 6 = 48$
- ② 한글책과 영어책을 뽑는 경우 : 곱의 법칙을 이용하여 $8 \times 5 = 40$
- ③ 불어책과 영어책을 뽑는 경우 : 곱의 법칙을 이용하여 $6 \times 5 = 30$

위의 세 경우는 서로 공통이 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여 $48 + 40 + 30 = 118$ 이다. $\square$

문제 1.1.8

아래 그림은 어느 지역의 도시 A, B, C, D 사이의 도로를 나타낸 것이다.



- (1) A에서 D로 갈 수 있는 방법의 수를 구하여라.
- (2) A에서 D로 갔다가 다시 A로 돌아오는 방법의 수를 구하여라.

예제 1.1.9 두 팀 A와 B가 게임을 하여 먼저 두 게임을 이기는 팀이 승리한다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라. (단, 무승부는 없다)

풀이>> 나올 수 있는 모든 경우는 아래 표와 같이 여섯 경우뿐이다.

첫 번째 게임에서 승자	두 번째 게임에서 승자	세 번째 게임에서 승자
A	A	
A	B	A
B	A	A
A	B	B
B	A	B
B	B	

표 1.1.1



문제 1.1.9

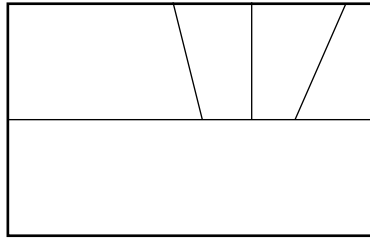
두 팀 A와 B가 게임을 하여 먼저 3게임을 이기는 팀이 승리한다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라. (단, 무승부는 없다)

>> 연습문제 1.1

1 100 이하의 자연수 중에서 다음 물음에 답하여라.

- (1) 10과 서로 소인 자연수의 개수를 구하여라.
- (2) 30과 서로 소인 자연수의 개수를 구하여라.

2 아래 그림의 모든 면을 k 가지 색으로 색칠하려고 한다. 이웃한 면은 서로 다르게 색칠한다면 모두 몇 가지 방법이 있는가?



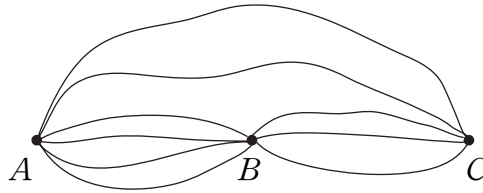
3 문자 a, b, c, d, e, f 를 배열하여 네 문자로 이루어진 단어를 만들려고 한다. 다음의 조건을 만족하는 단어의 수를 구하여라.

- (1) 문자를 중복해서 사용해도 좋을 경우
 - (a) 모든 단어
 - (b) 문자 b 를 포함하는 단어
- (2) 어떤 문자도 중복해서 사용할 수 없는 경우
 - (a) 모든 단어
 - (b) 문자 b 를 포함하는 단어
 - (c) a, b 가 이웃에 위치하는 단어
 - (d) a 가 b 의 왼쪽에 위치하는 단어

4 세 도시 A, B, C 가 있다. A 에서 B 로 가는 길의 수는 4, B 에서 C 로 가는 길의 수는 3, A 에서 C 로 직접 가는 길의 수는 2라고 한다.

- (1) A 에서 C 로 가는 방법의 수를 구하여라.

- (2) A 에서 C 로 가서 다시 A 로 돌아오는 방법의 수를 구하여라.
- (3) A 에서 C 로 가서 다시 A 로 돌아올 때, 적어도 B 는 한번 거치는 방법의 수를 구하여라.
- (4) 어떤 길도 두 번 이용하지 않으면서 A 에서 C 로 가서 다시 A 로 돌아오는 방법의 수를 구하여라.



5 1부터 100,000까지의 모든 자연수를 나열할 때 나타나는 숫자 5의 개수를 구하여라.

6 서로 다른 세 개의 주사위를 던질 때 나오는 수 중 가장 큰 수가 가장 작은 수의 두 배가 되는 경우의 수를 구하여라.

7 가로와 세로 각각 8개의 줄이 있는 바둑판이 있다. 색깔이 같은 두 개의 바둑알을 바둑판에 놓을 때,

- (1) 같은 행이나 같은 열에 두 바둑알이 오지 않도록 하는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 같은 행이나 같은 열, 같은 대각선에 두 바둑알이 오지 않도록 하는 방법의 수를 구하여라.

8 숫자 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7에서 몇 개를 뽑아 곱할 때 얻어지는 서로 다른 수의 개수를 구하여라.

9 숫자 1, 3, 5, 10, 20, 50, 82에서 몇 개를 뽑아 합할 때 얻어지는 서로 다른 수의 개수를 구하여라.

10 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 세 수를 뽑아 세 자리 수를 만들 때 4의 배수는 몇 개일까?

11 구별이 되지 않는 사과, 감, 배가 각각 n 개씩 있다. 이 과일 중에서 한 개 이상을 이용하여 선물용 과일 꾸러미를 만들 때 몇 가지 종류의 과일 꾸러미를 만들 수 있을까?

12 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 배열할 때 1은 첫째자리에, 2는 둘째자리에, 3은 셋째 자리에, 4는 넷째자리에 오지 않는 경우의 수를 구하여라.

13 수 6은 $3+2+1$ 로 쓸 수 있다. 이처럼 6을 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수를 구하여라. 단, $3+2+1$ 과 $1+3+2$ 등은 같은 것으로 생각한다.

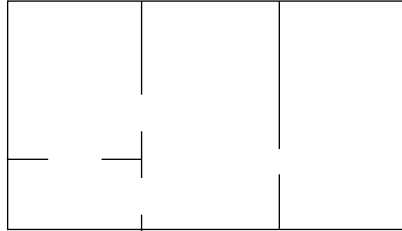
14 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 은 $\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$ 로 쓸 수 있다. 이처럼 $\{1, 2, 3, 4\}$ 를 서로 소인 몇 개의 부분집합의 합집합으로 나타내는 방법의 수를 구하여라. 여기서 $\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$ 와 $\{3\} \cup \{1, 2\} \cup \{4\}$ 등은 같은 것으로 생각한다.

15 동전 10원짜리가 7개, 50원짜리가 3개 있다.

(1) 위의 동전으로 지불할 수 있는 금액의 모든 경우의 수를 구하여라.

(2) 위의 동전으로 지불할 수 있는 방법의 모든 경우의 수를 구하여라.

- 16** 다음 그림과 같은 방을 k 가지 색깔로 페인트칠 하려고 한다. 방과 방 사이에 문이 있는 두 방은 서로 다른 색으로 칠한다면 모두 몇 가지의 방법이 있는가?



- 17** 귤, 사과, 배의 한 개의 값은 각각 200원, 300원, 500원이다. 1,500원으로 이런 과일을 사는 방법은 모두 몇 가지인가?

- 18** 숫자 1, 2, 3으로만 이루어진 n 자리 수에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 이와 같은 n 자리 수는 모두 몇 개인가?
- (2) 이와 같은 n 자리 수 중 1, 2가 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 a_n 이라 하자. a_1, a_2, a_3 을 각각 구하여라.
- (3) a_n 을 a_{n-1} 과 a_{n-2} 로 나타내어라. 또, 이를 이용하여 a_8 을 구하여라.
- (4) 평면의 직교좌표의 원점에서 시작하여 한번에 오른쪽이나 왼쪽, 또는 위로 1만큼 갈 수 있다고 하자. 한번 지난 점은 다시 지나지 않을 때 8번 후에 나올 수 있는 길은 모두 몇 가지인가?

제2절 순열

이 절에서는 여러 가지 상황에서 일어날 수 있는 사람이나 사물의 배열과 그 경우의 수에 대하여 알아보도록 하자.

예제 1.2.1 네 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 뽑아 일렬로 나열하여 보아라. 모두 몇 가지인가?

풀이>> 123 124 132 134 142 143
 213 214 231 234 241 243
 312 314 321 324 341 342
 412 413 421 423 431 432

모두 24가지가 있다. $\square$

문제 1.2.1

다섯 문자 a, b, c, d, e에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하여 보아라. 모두 몇 가지인가?

정의 1.2.1 n 이 자연수일 때 $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 으로 정의하고 n 의 계승(factorial)이라 부른다. 특별히 $0! = 1$ 이라고 약속한다.

예를 들어 $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$ 이다.

정의 1.2.2 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 뽑아 일렬로 나열한 것을 순열이라 하며, 이와 같은 순열의 수를 ${}_nP_r$ 로 나타낸다. 예를 들어 네 문자 a, b, c, d에서 서로 다른 두 문자를 뽑아 만든 순열을 모두 나열하면 ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc 이고, 따라서 ${}_4P_2 = 12$ 이다.

정리 1.2.3

n, r 을 $n \geq r$ 인 자연수라고 할 때 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 뽑아 일렬로 나열한 순열의 수 ${}_nP_r$ 은

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

이다. 특히 서로 다른 n 개를 일렬로 나열한 순열의 수는 ${}_nP_n = n!$ 이다.

【증명】 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 뽑아 일렬로 나열할 때, 첫 번째는 어느 것이라도 올 수 있으므로 n 가지 경우가 있고 두 번째에는 첫 번째에 온 것을 제외한 $(n-1)$ 가지 경우가 있다. 일반적으로 i 번째에는 첫째부터 $(i-1)$ 번째까지 쓰인 것을 제외한 $(n-i+1)$ 개 가운데 하나를 쓸 수 있으므로 $(n-i+1)$ 가지 경우가 있다.

따라서 곱의 법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

이다. 특히 서로 다른 n 개를 일렬로 나열한 순열의 수는

$$\begin{aligned} {}_nP_n &= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \\ &= n! \end{aligned}$$

이다. □

예제 1.2.2 30명으로 이루어진 반에서 반장, 부반장, 총무를 뽑을 수 있는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> 30명에서 세 명을 뽑아 일렬로 배열하여 첫 번째, 두 번째, 세 번째 사람을 각각 반장, 부반장, 총무로 생각하면 구하는 수는 ${}_{30}P_3 = 30 \times 29 \times 28$ 이다. □

문제 1.2.2

알파벳 26문자 중 서로 다른 네 문자로 이루어진 단어는 모두 몇 개인가?

예제 1.2.3 자연수 n, r 이 $n > r$ 일 때

$${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1}$$

임을 보여라.

풀이>> ${}_nP_r$ 은 1, 2, ..., n 에서 서로 다른 r 개를 뽑아 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로 다음의 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- ① n 이 뽑히지 않을 경우 : n 을 제외한 나머지 $n-1$ 개의 수 1, 2, ..., $n-1$ 에서 서로 다른 r 개를 뽑아 만든 순열이고 이런 순열의 수는 ${}_{n-1}P_r$ 이다.
- ② n 이 뽑힐 경우 : n 은 r 자리 중에서 하나를 차지하므로 n 이 위치할 수 있는 방법의 수는 r 이다. 이제 n 을 제외한 나머지 $n-1$ 개의 수 1, 2, ..., $n-1$ 에서 서로 다른 $r-1$ 개를 뽑아 만든 순열이며 이런 순열의 수는 ${}_{n-1}P_{r-1}$ 이다. 따라서 n 을 포함하는 순열의 수는 곱의 법칙에 의하여 $r \times {}_{n-1}P_{r-1}$ 이다.

위의 경우 ①과 경우 ②는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

$${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1}$$

이다. □

문제 1.2.3

자연수 n, r 이 $n \geq r > 1$ 일 때

$${}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$$

임을 보여라.

정의 1.2.4 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 뽑아 일렬로 나열하는 것을 **중복순열**이라 하며, 이런 모든 중복순열의 수를 ${}_n\Pi_r$ 로 나타낸다.

예제 1.2.4 세 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 모든 중복순열을 구하고 그 수를 구하여라.

풀이>> aa ab ac
ba bb bc
ca cb cc

그러므로 a, b, c에서 두 문자를 뽑아 만든 중복순열의 수는 ${}_3\Pi_2=9$ 이다. $\square$

문제 1.2.4

1과 2로만 이루어진 네 자리수를 모두 구하여라. 또 그런 네 자리수는 모두 몇 개인가?

예제 1.2.5 n, r 을 자연수라고 할 때

$${}_n\Pi_r = n^r$$

임을 보여라.

【증명】 ${}_n\Pi_r$ 은 자연수 1, 2, ..., n 에서 중복을 허락하여 r 개를 뽑아 나열하는 방법의 개수이다. 각 자리에는 1, 2, ..., n 중에서 어떤 수도 올 수 있으므로 n 가지 경우가 있고 곱의 법칙을 이용하면 ${}_n\Pi_r = n \times n \times \cdots \times n = n^r$ 이다. $\square$

문제 1.2.5

여덟 명을 세 여관 A, B, C에 투숙시킬 수 있는 방법의 수를 구하여라.

예제 1.2.6 8을 하나만 포함하는 네 자리 수의 개수를 구하여라.

풀이>> 다음의 네 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① 첫째자리에 8이 있는 경우

$$8000 : 9 \times 9 \times 9 = 9^3$$

② 둘째자리에 8이 있는 경우

$$0800 : 8 \times 9 \times 9 = 8 \times 9^2 \quad (\text{첫째자리엔 0이 아님})$$

③ 셋째자리에 8이 있는 경우

$$0080 : 8 \times 9 \times 9 = 8 \times 9^2 \quad (\text{첫째자리엔 0이 아님})$$

④ 넷째자리에 8이 있는 경우

$$0008 : 8 \times 9 \times 9 = 8 \times 9^2 \quad (\text{첫째자리엔 0이 아님})$$

위의 네 가지 경우는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

$$9^3 + 8 \times 9^2 + 8 \times 9^2 + 8 \times 9^2 = 9^3 + 24 \times 9^2$$

가지이다. □

문제 1.2.6

8을 두 개만 포함하는 네 자리 수의 개수를 구하여라.

정리 1.2.5

A가 p 개, B가 q 개, C가 r 개 있을 때 이 모든 문자를 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

이다. (단, $p+q+r=n$)

【증명】 구하는 순열의 수를 x 라 하자. p 개의 A, q 개의 B, r 개의 C를 모두 다른 문자 $A_1, A_2, \dots, A_p, B_1, B_2, \dots, B_q, C_1, C_2, \dots, C_r$ 로 생각하면 모든 문자가 다르므로 이 문자들로 이루어진 순열의 수는 $(p+q+r)! = n!$ 이다. 이런 순열 중에서 문자 $A_1, A_2, \dots, A_p$ 를 서로 바꾸어 만든 $p!$ 개의 순열은

우리가 구하는 순열에서는 모두 같게 되고 이것은 B와 C의 경우도 마찬가지이다. 그러므로 $x = \frac{n!}{p!q!r!}$ 이다. □

예제 1.2.7 여덟 명의 사람을 세 여관 A, B, C에 각각 3명, 3명, 2명씩 투숙시킬 수 있는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> 위의 조건에 맞게 투숙된 여덟 명을 어떤 특정한 한 순서로 배열하고 각각 자기가 투숙한 여관의 표지판을 들게 하면 A, A, A, B, B, B, C, C를 일렬로 배열한 것과 같게 된다. 따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{8!}{3!3!2!}$ 이다. □

문제 1.2.7

단어 MATHEMATICS에 사용된 문자의 순서를 바꾸어 만들 수 있는 모든 단어의 수를 구하여라.

예제 1.2.8 서로 다른 n 개에서 r 개를 뽑을 때 다음을 보여라.

- (1) 원형으로 배열할 수 있는 경우의 수는 ${}_nP_r \times \frac{1}{r}$ 이다.
- (2) 목걸이를 만들 수 있는 경우의 수는 ${}_nP_r \times \frac{1}{2r}$ 이다.

【증명】 (1) 서로 다른 n 개에서 r 개를 뽑아 만들 수 있는 순열 중에서 다음 r 개의 순열

$$a_1a_2\cdots a_r, a_2a_3\cdots a_ra_1, a_3a_4\cdots a_ra_1a_2, \cdots, a_ra_1a_2\cdots a_{r-1}$$

는 원형으로 배열하면 모두 같아진다. 즉, 전체 ${}_nP_r$ 개의 순열에서 r 개의 순열이 원형으로 배열하면 한 가지가 된다. 그러므로 서로 다른 n 개에서 r 개를 뽑아 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$${}_nP_r \times \frac{1}{r}$$

이다. 아래 그림 1.2.1은 $r=4$ 일 때 위의 설명을 그림으로 나타낸 것이다.

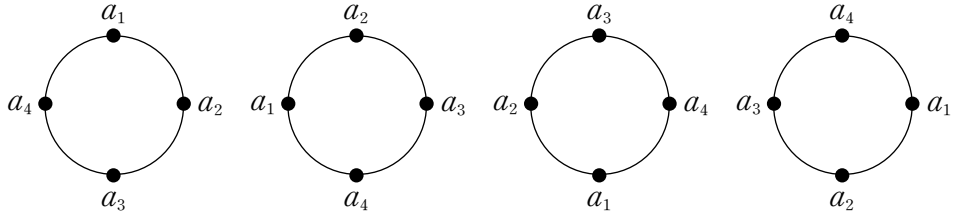


그림 1.2.1

(2) 목걸이에서는 아래 그림 1.2.2처럼 뒤집어도 같은 것이 되므로 2개의 원 순열이 하나의 목걸이순열이 된다. 그러므로 서로 다른 n 개에서 r 개를 뽑아 목걸이를 만드는 순열의 수는 ${}_nP_r \times \frac{1}{2r}$ 이다.

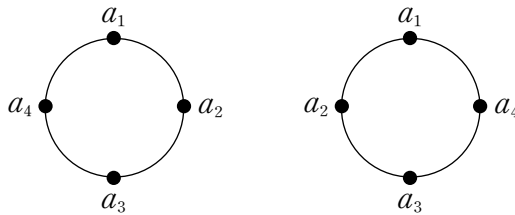


그림 1.2.2



문제 1.2.8

다음 물음에 답하여라.

- (1) 20명에서 10명을 뽑아 원탁에 앉힐 수 있는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 각각 색이 다른 20개의 구슬로 목걸이를 만들 수 있는 방법의 수를 구하여라.

예제 1.2.9 26개의 알파벳을 일렬로 나열할 때 a, b, c, d, e, f는 어느 두 문자도 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> 26개의 알파벳 중 a, b, c, d, e, f를 제외한 20개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $20!$ 이고 이렇게 배열된 문자와 문자 사이에 연속되지 않게 a, b,

c, d, e, f를 넣는 방법의 수는 ${}_{21}P_6$ 이므로 구하는 수는 곱의 법칙에 의해

$${}_{21}P_6 \cdot 20! = \frac{21!}{(21-6)!} \cdot 20!$$

이다. □

문제 1.2.9

26개의 알파벳을 원 위에 나열할 때 a, b, c, d, e는 어느 두 문자도 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수를 구하여라.

예제 1.2.10 26개의 알파벳을 일렬로 나열할 때 모음의 순서가 a, e, i, o, u가 되도록 하는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> 구하는 순열의 수를 x 라 하자. 모음의 순서를 무시하고 26개의 알파벳을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $26!$ 이다. 한편, 모음만의 순서를 바꾸어 만든 순열 중에서 모음의 순서가 a, e, i, o, u인 한 개만 우리가 원하는 경우이다. 즉, 5!개의 순열에서 오직 하나만 조건에 맞는 순열이다. 따라서 구하는 순열의 수 $x = \frac{26!}{5!}$ 이다. □

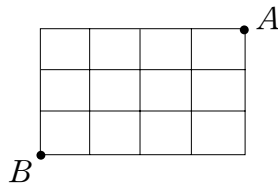
위 예제에서 알 수 있듯이 모음의 순서가 a, e, i, o, u가 되도록 26개의 알파벳을 일렬로 나열하는 방법의 수는 서로 다른 문자 21개와 같은 문자 5개를 일렬로 배열할 때의 경우의 수와 같다. 이렇게 특정한 문자의 순서가 정해진 순열에서는 순서가 정해진 문자를 모두 같은 문자로 생각하면 쉽게 해결할 수 있다.

문제 1.2.10

26개의 알파벳을 일렬로 나열할 때 다섯 개의 모음 a, e, i, o, u는 항상 붙어 있도록 하는 방법의 수를 구하여라.

>> 연습문제 1.2

- 1 서로 다른 7개의 공을 서로 다른 8개의 상자에 넣을 때 각 상자에 많아야 한 개의 공을 넣는 방법의 수를 구하여라.
- 2 세 문자 a, b, c 로 이루어진 길이 3인 단어를 모두 구하여라.
- 3 숫자 1, 2, 3, 4, 5로 만들 수 있는 세 자리 수의 개수를 구하여라.
- 4 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 라 할 때 A 에서 B 로 가는 함수의 개수를 구하여라. 또, 일대일 함수의 개수를 구하여라.
- 5 문자 a, a, a, b, b 를 일렬로 배열하는 순열을 모두 구하여라.
- 6 EDUCATION의 단어에 사용된 문자를 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 단어 중에서 D 가 N 의 왼쪽에 있는 것은 모두 몇 개인가?
- 7 아래 그림을 보고 다음 물음에 답하여라.



- (1) 위의 그림에서 아래로 한 칸 내려가는 것을 a , 왼쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하자. A 에서 B 로 가는 가장 짧은 경로의 집합과 a, a, a, b, b, b, b 로 이루어진 순열의 집합 사이에 일대일대응 함수를 찾아라.

(2) 위 (1)을 이용하여 A 에서 B 로 가는 가장 짧은 경로의 수를 구하여라.

8 문자 a, a, b, c 를 원형으로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

9 똑같은 모양의 빨간색 구슬 2개, 파란색 구슬 1개, 노란색 구슬 1개로 목걸이를 만들 수 있는 방법의 수를 구하여라.

10 같은 숫자가 연속으로 나오지 않는 n 자리 자연수의 개수를 구하여라.

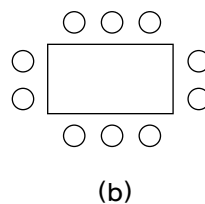
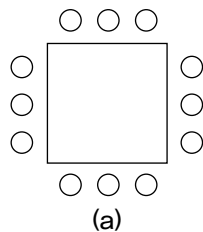
11 10,000 이하의 자연수 중 숫자 1과 9가 각각 한 번씩 나오는 수는 모두 몇 개인가?

12 숫자 1, 2, 3으로 이루어진 n 자리 수 가운데 적어도 한번 같은 숫자가 연속으로 나오는 수는 몇 개인가?

13 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 그림(a)와 같이 12명이 정사각형 모양의 책상에 앉는 방법의 수를 구하여라.

(2) 아래 그림(b)와 같이 10명이 직사각형 모양의 책상에 앉는 방법의 수를 구하여라.



14 다음 물음에 답하여라.

- (1) 두 수 10^{40} 과 20^{30} 의 모든 공약수의 개수를 구하여라.
- (2) 10^{40} 의 약수이거나 20^{30} 의 약수인 수의 개수를 구하여라.

15 다섯 자리 자연수 중에서 다음 조건을 만족하는 수의 개수를 구하여라.

- (1) 숫자 0을 적어도 하나 포함하는 수
- (2) 숫자 9를 적어도 하나 포함하는 수
- (3) 각각 숫자 0과 9를 적어도 하나 포함하는 수

***16** 알파벳 a, b, ..., z에서 8문자로 이루어진 단어 중 다음 조건을 만족하는 단어의 개수를 구하여라.

- (1) 두 모음을 포함하는 길이 8인 단어
- (2) 위 (1)에서 두 모음이 인접하는 단어

17 다섯 명의 남자와 다섯 명의 여자를 일렬로 세울 때, 다음을 구하여라.

- (1) 같은 성별끼리는 이웃하지 않도록 하는 경우의 수
- (2) 모든 사람이 적어도 한 쪽에는 같은 성별이 되도록 하는 경우의 수

***18** 세 개의 a, 다섯 개의 b, 여덟 개의 c를 일렬로 나열할 때 연속으로 b가 나오지 않는 경우의 수를 구하여라.

19 네 개의 a, 네 개의 b, 네 개의 c에서 각 문자를 적어도 2개씩 포함하는 10개의 문자로 이루어진 단어는 모두 몇 개인가?

20 모양으로는 구별되지 않는 빨간색 공 4개와 파란색 공 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하여라.

***21** 어떤 카드 가게에는 k 종류의 카드가 있다. 이 가게에서 카드를 사서 n 명에게 보내려 한다. (단, 같은 종류의 카드는 충분히 많다.)

- (1) 서로 다르게 보내는 방법은 모두 몇 가지인가?
- (2) 한 사람에게 한 장의 카드를 보낼 때 n 명이 모두 다른 카드를 받도록 보내는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, $k \geq n$)
- (3) 종류가 다른 두 카드를 n 장 사는 방법은 모두 몇 가지인가?
- (4) n 명에게 각각 종류가 다른 두장의 카드를 보내는 방법은 모두 몇 가지인가?

22 수영이는 한 걸음에 한 계단 또는 두 계단을 오를 수 있다. 수영이가 10개의 계단을 오를 수 있는 방법의 수를 구하여라.

23 서로 다른 n 개의 공을 모두 나누어주려고 한다.

- (1) 공을 두 사람에게 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 위 (1)에서 각자가 적어도 하나씩은 갖도록 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.
- (3) 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.
- (4) 위 (3)에서 각자가 적어도 하나씩은 갖도록 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.

24 서로 다른 5개의 음악 CD, 서로 다른 6개의 영화 DVD, 서로 다른 4개의 노래 테이프를 3명에게 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.

25 다음 물음에 답하여라.

- (1) 정사면체 각 면을 네 가지 색깔로 한 번씩만 색칠하는 경우의 수는?

(2) 정육면체 모양의 주사위 각 면에 1부터 6까지의 숫자를 쓸 수 있는 방법의 수를 구하여라.

(3) 위 (2)에서 마주보는 면에 적힌 수의 합이 7이 되도록 쓰는 방법의 수는?

***26** 가람이는 일곱 명의 친구를 7일 동안 하루에 세 명씩 저녁식사에 초대하려고 한다. 일곱 명의 친구 모두가 정확히 한번만 다른 모든 친구와 저녁식사를 할 수 있도록 초대하는 경우의 수를 구하여라.

>>유의 : *로 표시된 문제는 <제3절 조합>을 이용한다.

제3절 조합

시장에서 물건을 사거나 학기마다 하는 수강신청 등 우리는 살아가면서 많은 선택을 하게 된다. 이 절에서는 여러 가지 상황에서 일어나는 선택의 방법과 그 수에 대하여 알아보도록 하자.

예제 1.3.1 다섯 문자 a, b, c, d, e에서 서로 다른 2개를 뽑는 방법을 모두 나열하고 그 수를 구하여라.

풀이>> ab ac ad ae
bc bd be
cd ce
de

따라서 a, b, c, d, e에서 서로 다른 2개를 뽑는 방법의 수는 10이다. □

문제 1.3.1

다섯 문자 a, b, c, d, e에서 서로 다른 3개 뽑는 방법을 모두 나열하고 그 수를 구하여라.

정의 1.3.1 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 뽑는 것을 조합이라 하며, 이 조합의 수를 $\binom{n}{r}$ 또는 ${}_nC_r$ 로 나타낸다.

예를 들어 네 문자 a, b, c, d에서 서로 다른 두 문자를 뽑는 방법을 모두 나열하면 ab, ac, ad, bc, bd, cd이고, 따라서 ${}_4C_2=6$ 이다.

정리 1.3.2

n, r 을 $n \geq r$ 인 자연수라고 할 때 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 선택하는 조합의 수 $\binom{n}{r}$ 는

$$\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

이다.

【증명】 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 뽑아 이 r 개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_nP_r$ 이다. 여기서 서로 다른 n 개에서 r 개를 꺼내는 방법의 수는 $\binom{n}{r}$ 이고, r 개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$ 이므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_nP_r = \binom{n}{r} \times r!$ 이다.
그러므로

$$\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

이다. □

특별히 $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$ 이다.

예제 1.3.2 학생 30명으로 이루어진 반에서 다음을 구하여라.

- (1) 반장과 부반장을 뽑는 방법의 수
- (2) 대의원 두 명을 뽑는 방법의 수

풀이>> (1) 30명에서 두 명을 뽑아 일렬로 배열한 후 첫 번째 사람을 반장, 두 번째 사람을 부반장으로 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는 30명에서 두 명을 뽑아 일렬로 배열하는 수 ${}_{30}P_2$ 와 같고 이 값은 $30 \times 29 = 870$ 이다.
(2) 두 대의원 사이에는 구별이 없으므로 30명에서 두 명을 뽑는 조합의 수 ${}_{30}C_2 = 435$ 이다. 이것은 위 (1)에서 구한 870을 2로 나눈 값과 같다. □

문제 1.3.2

집합 A 를 $\{1, 2, \dots, 10\}$ 라 하자.

- (1) A 의 부분집합 중 두 원소로 이루어진 부분집합의 수를 구하여라.
- (2) A 의 부분집합 중 세 원소로 이루어진 부분집합의 수를 구하여라.
- (3) ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \dots + {}_{10}C_9 + {}_{10}C_{10} = 2^{10}$ 임을 보여라.

예제 1.3.3 여자 7명과 남자 4명 중에서 다섯 명의 대표 위원을 뽑을 때 적어도 남자가 1명 이상 뽑히는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> 다음의 네 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- ① 대표 위원이 여자 4명, 남자 1명인 경우 : ${}_7C_4 \times {}_4C_1 = 35 \times 4 = 140$
- ② 대표 위원이 여자 3명, 남자 2명인 경우 : ${}_7C_3 \times {}_4C_2 = 35 \times 6 = 210$
- ③ 대표 위원이 여자 2명, 남자 3명인 경우 : ${}_7C_2 \times {}_4C_3 = 21 \times 4 = 84$
- ④ 대표 위원이 여자 1명, 남자 4명인 경우 : ${}_7C_1 \times {}_4C_4 = 7 \times 1 = 7$

위의 네 가지 경우 중 어느 두 경우도 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여 $140 + 210 + 84 + 7 = 441$ 이다. □

문제 1.3.3

아래 도형에 대하여 다음 물음에 답하여라.

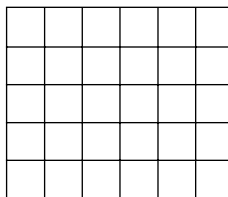


그림 1.3.1

- (1) 위의 도형에 있는 직사각형의 개수를 구하여라.
- (2) 위의 도형에 있는 정사각형의 개수를 구하여라.

예제 1.3.4 n, r 을 $n > r$ 인 자연수라고 할 때

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

임을 보여라.

풀이>> $\binom{n}{r}$ 은 $1, 2, \dots, n$ 에서 r 개를 뽑는 방법의 수로 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- ① n 이 뽑히지 않을 경우 : n 을 제외한 나머지 $n-1$ 개의 수에서 r 개를 뽑아야 하고 이 경우의 수는 $\binom{n-1}{r}$ 이다.
- ② n 이 뽑힐 경우 : n 이 이미 뽑혔으므로 나머지 $n-1$ 개의 수에서 $r-1$ 개를 뽑아야 하고 이 경우의 수는 $\binom{n-1}{r-1}$ 이다.

위의 ①과 ②는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

이다. □

관계식 $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ 을 이용하면 아래 표와 같이 이항계수 $\binom{n}{r}$ 를 쉽게 구할 수 있다. 이 표를 **파스칼의 삼각형**이라 한다.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	...
0	1							...
1	1	1						...
2	1	2	1					...
3	1	3	3	1				...
4	1	4	6	4	1			...
5	1	5	10	10	5	1		...
6	1	6	15	20	15	6	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

표 1.3.1

문제 1.3.4

조합의 정의를 이용하여 다음을 보여라.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

예제 1.3.5 다음과 같은 도로망에서 지점 A에서 B로 도달하는 최단 경로의 수는?

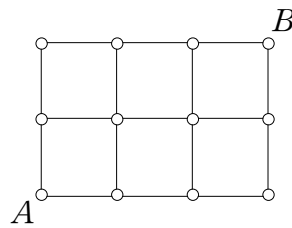


그림 1.3.2

풀이>> 오른쪽으로 가면 a, 위쪽으로 가면 b의 문자로 나타낼 때 A에서 B로 가는 최단 경로는 a, a, a, b, b를 일렬로 나열한 것과 일대일 대응된다. 예를 들어 그림 1.3.3에서 굵은 선으로 표시된 경로는

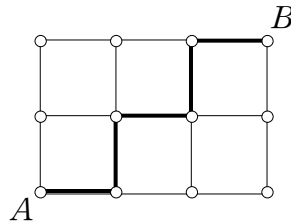


그림 1.3.3

a b a b a와 대응된다. 한편, 이러한 순열은 5개의 자리 중 3곳을 택하여 a를 배열하고 남는 곳에 b를 배열하면 되므로 그 순열의 수는 $\binom{5}{3}$ 이고 따라서 A에서 B로 가는 최단 경로의 수도 $\binom{5}{3} = 10$ 이다. □

일반적으로 가로와 세로가 각각 m, n 칸인 직사각형 도로망에서 왼쪽 아래 끝점에서 오른쪽 위 끝점에 이르는 최단경로의 수는 $\binom{m+n}{m}$ 이다.

문제 1.3.5

다음과 같은 도로망에서 지점 A 에서 B 로 도달하는 최단 경로의 수를 구하여라.

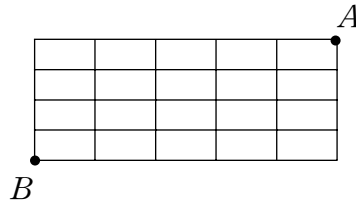


그림 1.3.4

예제 1.3.6 다섯 문자 a, b, c, d, e 에서 중복을 허락하여 2개를 뽑는 방법을 모두 나열하고 그 수를 구하여라.

풀이>> aa ab ac ad ae
bb bc bd be cc
cd ce dd de ee

따라서 a, b, c, d, e 에서 중복을 허락하여 2개를 뽑는 방법의 수는 15이다. $\square$

문제 1.3.6

세 문자 a, b, c 에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 방법을 모두 나열하고 그 경우의 수를 구하여라.

정의 1.3.3 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개 뽑는 방법을 **중복조합**이라 하며, 이 중복조합의 수를 ${}_nH_r$ 로 나타낸다.

예를 들어 네 문자 a, b, c, d 에서 중복을 허락하여 두 문자를 뽑는 방법을 모두 나열하면

aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd

이고, 따라서 ${}_4H_2=10$ 이다.

두 집합이 주어졌을 때 한 집합에서 다른 집합으로 가는 일대일대응 함수가 하나라도 존재하면 두 집합의 원소의 개수는 같다. 이 사실을 이용하여 다음을 알아보자.

예제 1.3.7 다음 경우의 수는 모두 ${}_3H_7$ 임을 보여라.

- (a) 세 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 7개의 숫자를 뽑는 조합의 수
- (b) 똑같은 공 7개를 3개의 서로 다른 상자 X, Y, Z 에 넣는 방법의 수
- (c) 방정식 $r+s+t=7$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 (r, s, t) 의 개수
- (d) 7개의 ○와 2개의 |를 일렬로 배열하는 방법의 수
- (e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 7개의 숫자를 뽑는 방법의 수

풀이>> 집합 A, B, C, D, E 를 다음과 같이 정의하자.

$A=\{x \mid x \text{는 } 1, 2, 3 \text{ 세 숫자 중에서 중복을 허락하여 7개의 숫자를 뽑은 조합}\}$

$B=\{x \mid x \text{는 똑같은 공 7개를 3개의 서로 다른 상자 } X, Y, Z \text{에 넣는 방법}\}$

$C=\{x \mid x \text{는 방정식 } r+s+t=7 \text{을 만족하는 음이 아닌 정수해 } (r, s, t)\}$

$D=\{x \mid x \text{는 7개의 } \bigcirc \text{와 2개의 } | \text{를 일렬로 배열하는 방법}\}$

$E=\{x \mid x \text{는 } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ 중에서 서로 다른 7개의 숫자를 뽑는 방법}\}$

여기서는 예를 통하여 위 다섯 집합 사이의 일대일대응 함수를 만들어 위 다섯 집합의 원소의 수가 모두 같음을 보인다.

- ① $A \Leftrightarrow B$: 세 숫자 1, 2, 3 중 중복을 허락하여 7개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3을 뽑았다고 하자. 상자 X, Y, Z 에 각각 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3에서 1의 개수인 1개, 2의 개수인 2개, 3의 개수인 4개씩 공을 넣는다.

역으로, 상자 X, Y, Z 에 공이 각각 1, 2, 4개씩 있으면 1을 한 번, 2를 두 번, 3을 네 번 뽑아 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3를 만든다.

위의 두 대응은 분명히 서로 역이므로 일대일대응 함수이다.

- ② $B \Leftrightarrow C$: 상자 X, Y, Z 에 공이 각각 2, 2, 3개씩 있으면 $r=2, s=2, t=3$ 을

잡으면 (r, s, t) 는 $r+s+t=7$ 의 해이다.

역으로, $r+s+t=7$ 의 하나의 해 $r=4, s=0, t=3$ 을 잡으면 상자 X, Y, Z에 공을 각각 4, 0, 3개씩 넣는다.

위의 두 대응도 서로 역이므로 일대일대응 함수이다.

③ $C \Leftrightarrow D$: $r+s+t=7$ 의 하나의 해 $r=2, s=4, t=1$ 을 잡으면

○○|○○○○|○

로 배열한다. 역으로, 7개의 ○와 2개의 |가

|○○|○○○○○

로 배열되었으면 $r=0, s=2, t=5$ 로 잡으면 이는 분명히 $r+s+t=7$ 의 해이다.

위의 두 대응도 서로 역이므로 일대일대응 함수이다.

④ $D \Leftrightarrow E$: 7개의 ○와 2개의 |가

○○|○○○○|○

로 배열되었으면 처음부터 번호를 붙여 ○에 해당하는 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9를 뽑으면 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 7개의 숫자를 뽑은 것이다.

역으로, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9에서 서로 다른 7개의 숫자 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9를 뽑으면 처음부터 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9번째엔 ○를, 나머지에는 |를 넣어

○○○|○○|○○

로 배열하면 7개의 ○와 2개의 |를 일렬로 배열하는 방법이 된다.

위의 두 대응도 분명히 서로 역이므로 일대일대응 함수이다.

⑤ $E \Leftrightarrow A$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9에서 서로 다른 7개의 숫자 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9를 뽑으면 처음 수는 그대로, 두 번째 수에서는 1을, 세 번째 수에서는 2를, ..., 마지막 수에서는 6을 각각 빼어 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3을 만들면 1, 2, 3 세 숫자 중에서 중복을 허락하여 7개의 숫자를 뽑은 것이 된다.

이제 1, 2, 3 세 숫자 중에서 중복을 허락하여 7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3을 뽑았다면 처음 수는 그대로, 두 번째 수에서는 1을, 세 번째 수에서는 2를, ..., 마지막 수에서는 6을 각각 더하여 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9를 만들면 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9에서 서로 다른 7개의 숫자를 뽑은 것이 된다.

위의 두 대응도 분명히 서로 역이므로 일대일대응 함수이다.

위의 다섯 집합 A, B, C, D, E 중 어느 두 집합 사이에도 일대일대응 함수가 있고, 따라서 그 원소의 수는 모두 같다. 한편, 정의에 의하여 집합 A 의 원소의 수는 ${}_3H_7$ 이므로 위의 조건을 만족하는 경우의 수는 모두 ${}_3H_7$ 이다. $\square$

문제 1.3.7

예제 1.3.7의 풀이에서 A 의 한 중복조합 $1, 1, 2, 2, 2, 2, 3$ 에 대응하는 집합 B, C, D, E 의 원소를 각각 찾아라.

정리 1.3.4

n, r 을 자연수라 할 때 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.

【증명】

방법 1

위의 예제 1.3.7과 마찬가지로 ${}_nH_r$ 은 r 개의 $\bigcirc$ 와 $n-1$ 개의 $|$ 를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같고, 이 수는 $r+n-1$ 개의 자리 중 r 개의 자리를 뽑아 $\bigcirc$ 를 배열하고 나머지 자리에 $n-1$ 개의 $|$ 를 배열하는 방법의 수이므로 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.

방법 2

n 개의 수 $1, 2, 3, \dots, n$ 에서 중복을 허락하여 r 개를 꺼낸 수를

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \quad (1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_r \leq n) \quad (3.1)$$

라 하자.

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 + 1, b_3 = a_3 + 2, \dots, b_r = a_r + (r-1) \quad (3.2)$$

이라 하면

$$1 \leq b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_r \leq n+r-1 \quad (3.3)$$

이다. 위에서 (3.1)의 조건을 만족하는 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 이 주어지면 (3.2)를 적용하여 (3.3)의 조건을 만족하는 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 이 결정되고, 반대로 (3.3)의 조건을 만족하는 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 이 주어지면 (3.1)의 조건을 만족하는 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 이 결정된다. 그

러므로 (3.1)의 조건을 만족하도록 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 을 뽑는 방법의 수는 (3.3)의 조건을 만족하도록 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 을 뽑는 방법의 수와 같다.

한편 (3.3)의 조건을 만족하도록 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 을 뽑는 방법의 수는 $n+r-1$ 개의 수 $1, 2, \dots, n+r-1$ 에서 r 개를 뽑는 방법의 수이므로 ${}_{n+r-1}C_r$ 이고, 따라서

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

이다. □

예제 1.3.8 다음 경우의 수를 구하여라.

- (1) 똑같은 20개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 넣을 때 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수
- (2) n, r 이 자연수일 때 방정식 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ 의 자연수 해의 개수

풀이>> (1) 우선 빈 상자가 없도록 각 상자에 공을 하나씩 넣고 남은 16개의 똑같은 공을 서로 다른 4개의 상자에 넣는다. 이런 방법의 수는 예제 1.3.7에 의하여 ${}_4H_{16} = {}_{19}C_{16} = {}_{19}C_3$ 이다.

- (2) **방법 1** : $y_i = x_i - 1$ 라 하면 y_i 는 음이 아닌 정수이고 주어진 방정식은

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = r - n$$

이다. 이 방정식의 해의 개수는 예제 1.3.7에 의해

$${}_nH_{r-n} = {}_{r-1}C_{r-n} = {}_{r-1}C_{n-1}$$

이다.

방법 2 : r 개의 ○사이에 $n-1$ 개의 |를 끼워서 ○를 n 묶음으로 나누고 i 번째 묶음에 있는 ○의 수를 x_i 라고 하자. 그러면 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 는 방정식 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ 의 자연수인 해이다. 예를 들어 $r=10$ 이고 $n=4$ 일 때

$$\bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc | \bigcirc$$

이면 $x_1=2, x_2=3, x_3=4, x_4=1$ 이며 이는 $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ 의 자연수 해이다. 한편, ○와 ○사이에는 $r-1$ 곳이 있고 이 사이에 $n-1$ 개의 |를 끼워 넣는 방법의 수는 ${}_{r-1}C_{n-1}$ 이기 때문에 구하는 경우의 수는 ${}_{r-1}C_{n-1}$ 이다. □

문제 1.3.8

다음 경우의 수를 구하여라.

- (1) 똑같은 20개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 넣을 때 각 상자에 적어도 둘 이상의 공이 있도록 넣는 방법의 수
- (2) n, r 을 자연수라 하자. n 개의 미지수를 갖는 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 의 자연수 해 중에서 모든 x_i 가 2보다 큰 해의 개수

예제 1.3.9 다음의 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수해 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 의 개수를 구하여라.

$$x_1+x_2+\cdots+x_k \leq n \quad (3.4)$$

풀이>> 방법 1 : 위 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수해 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 에 대하여

$$x_{k+1} = n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

라 하면 $(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1})$ 은 방정식

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n \quad (3.5)$$

의 음이 아닌 정수해이다.

역으로 $(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1})$ 이 방정식 (3.5)의 음이 아닌 정수해라면 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 는 부등식 (3.4)의 음이 아닌 정수해이다.

그러므로 부등식 (3.4)의 음이 아닌 정수해의 개수는 방정식 (3.5)의 음이 아닌 정수해의 개수와 같고 이런 방정식의 음이 아닌 정수해의 수는 예제 1.3.7에 의하여 다음과 같다.

$${}_{k+1}H_n = \binom{(k+1)+n-1}{n} = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$$

방법 2 : 아래 그림과 같은 $(n+k)$ 칸에서 k 칸을 선택하여 ○로 나타내어보자.

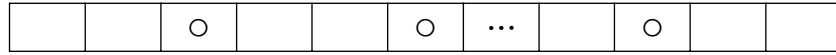


그림 1.3.5

x_i 를 앞에서 세어 $(i-1)$ 번째 ○에서 i 번째 ○사이에 있는 칸의 개수라 하면 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 는 부등식 $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ 의 음이 아닌 정수해이다. 예를 들어 $n=7, k=3$ 인 경우 아래 그림과 같이 나타내어졌다면 $x_1=1, x_2=0, x_3=5$ 이고, $(1, 0, 5)$ 는 부등식 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해이다.

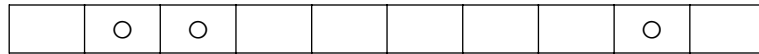


그림 1.3.6

역으로, 부등식 $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ 의 음이 아닌 정수해 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 가 주어지면 위와 같은 방법으로 $(n+k)$ 칸에서 k 칸을 선택할 수 있으므로 위의 대응은 일대일대응이다.

그러므로 $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ 의 음이 아닌 정수해 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 의 개수는 $(n+k)$ 개의 칸에서 k 개의 칸을 선택하는 경우의 수 $\binom{n+k}{k}$ 와 같다. □

문제 1.3.9

다음 부등식을 만족하는 자연수해 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 의 개수를 구하여라.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$$

예제 1.3.10 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에서 k 개의 원소를 가지는 부분집합 중에서 연속된 수를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

풀이>> 집합 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ (단, $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n$)를 연속된 수를 포함하지 않는 A 의 부분집합이라 하자.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 1 \geq 0 \\ y_2 &= x_2 - x_1 - 2 \geq 0 \\ &\vdots \\ y_k &= x_k - x_{k-1} - 2 \geq 0 \\ y_{k+1} &= n - x_k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

이라면 $(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$ 는 유일하게 결정된다.

역으로, 식(3.6)을 만족하는 $(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$ 가 주어지면 연속된 수를 포함하지 않는 A 의 부분집합 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 도 유일하게 결정된다. 그러므로 k 개의 원소를 가지는 A 의 부분집합 중 연속된 수를 포함하지 않는 부분집합의 개수는 (3.6)을 만족하는 $(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$ 의 개수와 같다.

한편, $(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$ 이 (3.6)을 만족하면 $(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$ 는 방정식

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k + y_{k+1} = n - 2k + 1$$

의 음이 아닌 정수해이고 이런 정수해의 개수는

$${}_{k+1}H_{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{k}$$

이다. 따라서 k 개의 원소를 갖고 연속된 수를 포함하지 않는 A 의 부분집합의 수는

$$\binom{n-k+1}{k}$$

이다. □

문제 1.3.10

원 위의 n 개의 점이 있다. 이 중에서 연속되지 않는 k 개의 점을 선택하는 방법의 수를 구하여라. (힌트 : 어떤 특정한 점이 선택될 경우와 선택되지 않는 경우로 나누어 생각한다.)

>> 연습문제 1.3

1 7명의 여자와 4명의 남자 중에서 여자 두 명과 남자 두 명의 대표 위원을 뽑을 수 있는 방법의 수를 구하여라.

2 다섯 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 이용할 때, 다음을 구하여라.

- (1) 서로 다른 두 숫자를 이용하여 두 자리 수를 만드는 방법의 수
- (2) 서로 다른 두 숫자를 이용하여 두 자리 수를 만들 때 십의 자리수가 일의 자리 수보다 큰 경우의 수
- (3) 중복을 허락하여 두 자리 수를 만드는 방법의 수
- (4) 두 자리 수를 만들 때 십의 자리수가 일의 자리수보다 작지 않은 경우의 수

3 문자 a, e, i, o, u, x, x, x, x, x, x, x, x를 모두 이용하여 일렬로 배열할 때 모음 끼리는 서로 이웃하지 않도록 하는 방법의 수를 구하여라.

4 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 에서 서로 다른 네 원소를 택할 때, 다음을 구하여라.

- (단, $n > 20$)
- (1) 택한 원소 중 가장 큰 수가 20보다 클 경우의 수
 - (2) 택한 원소 중 가장 큰 수가 20일 경우의 수

5 15명의 사람이 있다.

- (1) 각각 5명씩 세 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하여라.
- (2) 위 (1)에서 특별한 두 사람 A, B가 같은 그룹에 있는 경우의 수를 구하여라.

6 자연수 a, b, c, d 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) $a < b < c < d < 20$ 인 (a, b, c, d)는 모두 몇 개인가?
- (2) $a \leq b \leq c \leq d \leq 20$ 인 (a, b, c, d)는 모두 몇 개인가?

7 숫자 1, 2, 3으로 이루어진 n 자리 수 중에서 정확히 1이 k 번 나오는 수는 모두 몇 개인가?

8 다음 방정식의 해의 개수를 구하여라.

- (1) 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$ (각 x_i 는 양의 정수)
- (2) 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$ (각 x_i 는 양의 홀수)
- (3) 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 28$ (각 x_i 는 i 보다 큰 정수)
- (4) 방정식 $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ (각 x_i 는 음이 아닌 정수)

9 부등식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 28$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

10 서로 다른 n 가지 종류의 물건이 있고 각 종류의 물건은 충분히 많다고 하자.

- (1) 정확히 한 종류만 제외하고 k 개를 뽑는 경우의 수를 구하여라.
- (2) 정확히 m 종류만을 제외하고 k 개를 뽑는 경우의 수를 구하여라. (단, $m < n$)

11 영어 알파벳 26자를 일렬로 배열할 때 어느 두 모음도 이웃하지 않는 경우의 수를 구하여라.

12 문자 a, b, c, d가 각각 n 개씩 있다. 여기서 $2n$ 개의 문자를 선택하는 경우의 수를 구하여라.

13 n 개의 똑같은 공과 n 개의 서로 다른 방망이가 있다. 여기서 n 개의 공이나 방망이를 선택하는 경우의 수를 구하여라.

14 연립방정식 $x_1 + x_3 = 6$ 과 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

15 $2n$ 개의 a, $2n$ 개의 b, $2n$ 개의 c를 각각 개수가 $3n$ 인 두 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

16 4개의 똑같은 골과 6개의 서로 다른 사과가 있다.
 (1) 위의 과일을 5사람에게 나누어줄 수 있는 방법의 수를 구하여라.
 (2) 5사람 모두가 두 개의 과일을 갖도록 나누어주는 방법의 수를 구하여라.

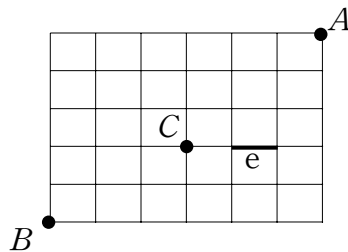
17 다음 방정식의 자연수해 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 중에서 적어도 하나의 x_i 가 짝수인 해의 개수를 구하여라.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 35$$

18 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ 중에서 가장 큰 수를 찾아라.

19 p 가 소수일 때 $\binom{p}{k}$ 는 p 의 배수임을 보여라. (단, $0 < k < p$)

20 아래 그림을 보고 다음 물음에 답하여라.



- (1) 꼭지점 A 에서 B 로 가는 최단 경로의 수를 구하여라.
- (2) 꼭지점 A 에서 B 로 가는 최단 경로 중에서 반드시 점 C 를 지나는 경로의 수를 구하여라.
- (3) 꼭지점 A 에서 B 로 가는 최단 경로 중에서 길 e 를 지나지 않는 경로의 수를 구하여라.

21 두 수 m, n 을 $m \geq n$ 인 자연수라 하자. 함수 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) 모든 함수 f 의 개수
- (2) 일대일 함수 f 의 개수
- (3) 조건 $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$ 을 만족하는 함수 f 의 개수
- (4) 조건 $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(n)$ 을 만족하는 함수 f 의 개수

22 자연수 10은 $3+2+2+2+1$ 로 쓸 수 있다. 이처럼 10을 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수를 구하여라. 여기서, $3+2+2+2+1$ 과 $2+2+3+1+2$ 는 다른 것으로 생각한다.

23 원 위에 n 개의 점이 있다. 이 점을 서로 모두 이을 때 어느 세 선분도 한 점에서 만나지 않는다고 한다.

- (1) 원의 내부에 있는 교점의 개수를 구하여라.
- (2) 위의 원은 몇 개의 부분으로 나누어지는가?

제4절 이항계수

서로 다른 n 개의 물건에서 서로 다른 k 개를 뽑는 방법의 수인 $\binom{n}{k}$ 를 이항계수라고도 한다. 이 절에서는 이항계수를 포함하는 여러 가지 등식에 대하여 알아보자.

예제 1.4.1 조합의 정의를 이용하여 $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ 임을 보여라.

풀이>> n 명 중에 r 명을 뽑아 사탕을 주고 다시 사탕을 받은 r 명 중에 k 명을 뽑아 초콜릿을 주는 방법의 수를 생각해보자.

① n 명 중에 r 명을 뽑아 사탕을 주는 방법의 수는 $\binom{n}{r}$ 이고 사탕을 받은 r 명 중에 k 명을 뽑아 초콜릿을 주는 방법의 수는 $\binom{r}{k}$ 이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $\binom{n}{r}\binom{r}{k}$ 이다.

② 사탕과 초콜릿을 모두 받은 사람은 n 명 중 k 명이고 사탕만 받은 사람은 나머지 $n-k$ 명 중에 $r-k$ 명이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ 이다.

위의 ①과 ②는 같아야 하므로

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

이다. □

문제 1.4.1

조합의 정의를 이용하여 $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ 임을 보여라.

예제 1.4.2 n 명의 남자와 n 명의 여자가 있다.

- (1) n 명의 대표를 뽑는 방법의 수를 구하여라.
- (2) k 명의 남자와 $(n-k)$ 명의 여자가 대표가 되도록 뽑는 방법의 수를 구하여라.
- (3) 위 (1), (2)를 이용하여

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

임을 보여라.

풀이>> (1) $2n$ 명 중에서 n 명의 대표를 뽑는 방법의 수이므로 $\binom{2n}{n}$ 이다.

(2) n 명의 남자 중에 k 명의 대표를 뽑는 방법의 수는 $\binom{n}{k}$ 이고 n 명의 여자 중에 $n-k$ 명의 대표를 뽑는 방법의 수는 $\binom{n}{n-k}$ 이다. 그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ 이다.

(3) 위 (1)에 의해 $\binom{2n}{n}$ 은 $2n$ 명 중에서 n 명의 대표를 뽑는 방법의 수이다. 각 $k=0, 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 남자 대표의 수가 k , 여자 대표의 수가 $n-k$ 가 되도록 대표를 뽑는 방법의 수는 위 (2)에 의하여 $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ 이므로 합의 법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \\ &= \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{k}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 \end{aligned}$$

이다. □

문제 1.4.2

조합의 정의를 이용하여 $\binom{2n}{2} = 2 \times \binom{n}{2} + n^2$ 임을 보여라.

예제 1.4.3 아래 그림은 가로가 k 칸, 세로가 $n-k$ 칸인 도로망을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여라.

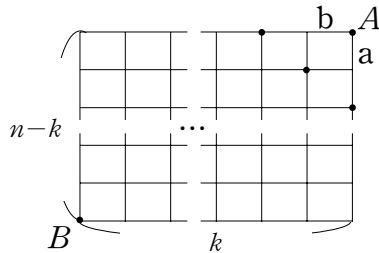


그림 1.4.1

- (1) 꼭지점 A 에서 B 로 가는 최단 경로는 모두 몇 가지인가?
- (2) 꼭지점 A 에서 B 로 가는 최단 경로 중 a 를 지나는 길은 모두 몇 가지인가?
- (3) 꼭지점 A 에서 B 로 가는 최단 경로 중 b 를 지나는 길은 모두 몇 가지인가?
- (4) 위 (2), (3)를 이용하여 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 임을 보여라.

풀이>> (1) $\binom{n}{k}$

(2) $\binom{n-1}{k}$

(3) $\binom{n-1}{k-1}$

- (4) A 에서 B 로 가는 최단 경로는 반드시 a 나 b 를 통과해야 하고 위 (2)와 (3)에

의해 길 a 와 b 를 통과하는 최단 경로의 수는 각각 $\binom{n-1}{k}$ 와 $\binom{n-1}{k-1}$ 이다.

그러므로 A 에서 B 로 가는 최단 경로의 수 $\binom{n}{k}$ 는 합의 법칙에 의해

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

이다. □

문제 1.4.3

앞의 그림 1.4.1를 이용하여

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$$

임을 보여라.

정리 1.4.1 (이항정리) n 을 자연수라 하면

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n}y^n \\ &= \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{0}y^n \end{aligned}$$

이다. 특히, $y=1$ 이면

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0} \end{aligned}$$

이다.

【증명】 $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ 의 전개식에서 $x^{n-k}y^k$ 의 계수는 n 개의 $(x+y)$ 의 곱에서 x 를 $n-k$ 번 뽑는 수와 같으므로 $\binom{n}{n-k}$ 또는 $\binom{n}{k}$ 이다. 따라서 정리의 등식이 성립한다. $\square$

예제 1.4.4 다음 물음에 답하여라.

- (1) $(a+b)^7$ 을 전개하여라.
- (2) $(2x-4y)^8$ 의 전개식에서 x^5y^3 의 계수를 구하여라.
- (3) $(2x-4y)^8$ 을 전개할 때 각 항의 계수의 합을 구하여라.

풀이>> (1) 이항정리에 의하여

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

(2) 이항정리에 의하여 $\binom{8}{5} \cdot 2^5 \cdot (-4)^3$ 이다.

(3) $(2x-4y)^8$ 을 전개할 때 각 항의 계수의 합은 $(2x-4y)^8$ 에서 $x=y=1$ 을 대입한 결과와 같으므로 $(-2)^8$ 이다. □

문제 1.4.4

다음 물음에 답하여라.

- (1) 이항정리를 이용하여 $(3x+2)^5$ 를 전개하여라.
- (2) $(2x-y)^8$ 의 전개식에서 x^6y^2 의 계수를 구하여라.
- (3) $(3x+4y)^6$ 의 전개식에서 각 항의 계수의 합을 구하여라.
- (4) $(2x+3)^4(x+1)^8$ 의 전개식에서 x^5 의 계수를 구하여라.

예제 1.4.5 다음의 등식이 성립함을 보여라.

- (1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
- (2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$
- (3) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$
- (4) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$

풀이>> (1) **방법 1** : 이항정리에서 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

방법 2 : 집합 $A=\{1, 2, \cdots, n\}$ 의 부분집합의 개수는 2^n 이다. 한편, A 에서 원소의 개수가 $0, 1, \cdots, n$ 인 부분집합의 개수는 각각 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$ 이므로 A 의 모든 부분집합의 개수는

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

이다. 따라서

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

이다.

(2) **방법 1** : 이항정리에서 $x=1, y=-1$ 을 대입하면

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

이다. 따라서,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

이다. 한편 위 (1)에 의하여 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ 이므로

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$$

방법 2 : 집합 $A=\{1, 2, \cdots, n\}$ 라 하자. X 를 원소의 개수가 짝수인 A 의 부분집합의 집합, Y 를 원소의 개수가 홀수인 A 의 부분집합의 집합이라 하자. 즉,

$$X = \{ B \mid B \subseteq A, |B| \text{는 짝수} \}$$

$$Y = \{ C \mid C \subseteq A, |C| \text{는 홀수} \}$$

이다. 이제 함수 $f: X \rightarrow Y$ 와 $g: Y \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(B) = \begin{cases} B - \{n\} & (n \in B) \\ B \cup \{n\} & (n \notin B) \end{cases}, \quad g(C) = \begin{cases} C - \{n\} & (n \in C) \\ C \cup \{n\} & (n \notin C) \end{cases}$$

그러면 f 와 g 는 서로 역함수가 되어 f 는 일대일대응 함수이다. 따라서 $|X| = |Y|$ 이다. 한편,

$$|X| = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

$$|Y| = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

이고 $|X| + |Y| = 2^n$ 이므로 $|X| = |Y| = 2^{n-1}$ 이다.

$$(3) \text{ 방법 1 : } \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

에서 양변에 정적분 $\int_0^1 \cdot dx$ 를 취하면

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

이다.

방법 2 : 문제 1.4.1의 등식으로부터

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

을 이용하면

$$\begin{aligned} & (n+1) \left[\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} \right] \\ &= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

이다.

(4) **방법 1** : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$

에서 양변을 미분하면

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$$

이다. 여기에 $x=1$ 을 대입하면

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

이다.

방법 2 : 문제 1.4.1의 등식으로부터

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

을 이용하여

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} \\ &= n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + n\binom{n-1}{2} + \cdots + n\binom{n-1}{n-1} \\ &= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right] \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

이다. □

문제 1.4.5

다음 식의 값을 구하여라.

$$(1) \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \cdots + \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n}$$

$$(2) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot 2 + \cdots + \binom{n}{k} \cdot 2^k + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 2^n$$

$$(3) 0^2 \cdot \binom{n}{0} + 1^2 \cdot \binom{n}{1} + \cdots + k^2 \cdot \binom{n}{k} + \cdots + n^2 \cdot \binom{n}{n}$$

두 다항식의 합, 차, 곱은 모두 다항식이다. 특히 두 다항식의 곱

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)$$

에서 x^n 의 계수는

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

이다.

예제 1.4.6 다항식의 곱을 이용하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0 & (n : \text{홀수}) \\ (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2} & (n : \text{짝수}) \end{cases}$$

풀이>> 이항정리에 의하여

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

$$(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k}x^k + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}x^n$$

이다. 이 두 식을 곱하면

$$(1+x)^n(1-x)^n = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} \right) x^k \quad (4.1)$$

이다.

앞의 식 (4.1)에서 x^n 의 계수를 구하면

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{n-j} \binom{n}{j} \quad (n-i \text{를 } j \text{로 치환}) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}^2 \\ &= \binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2\end{aligned}$$

이다.

한편 $(1+x)^n(1-x)^n = (1-x^2)^n$ 에서 x^n 의 계수는 n 이 홀수이면 0, n 이 짝수이면 $(-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{n/2}$ 이므로

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0 & (n:\text{홀수}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{n/2} & (n:\text{짝수}) \end{cases}$$

이다. □

문제 1.4.6

다음 식의 값을 구하여라.

$$\binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} \quad (\text{단, } k \leq \text{Min}\{m, n\})$$

이항계수가 포함된 등식은 다음과 같은 방법을 이용하여 증명할 수 있다.

- (1) 수학적귀납법
- (2) 이항정리를 이용한 방법
- (3) 조합의 정의나 도로망 등을 이용한 조합론적인 증명

예제 1.4.7 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$(1) \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$

$$(2) \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$(3) \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

풀이>> (1) **방법 1** : r 에 관한 수학적귀납법

(i) $r=0$ 이면 양변 모두 1로 등식이 성립한다.

(ii) $r>0$ 이고 $r-1$ 일 때 위의 (1)의 등식이 성립한다고 하자. 그러면

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r}{r-1}$$

(iii) 위 (ii)와 예제 1.3.4에 의하여

$$\begin{aligned} & \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r} \\ &= \binom{n+r}{r-1} + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r} \end{aligned}$$

그러므로 모든 음이 아닌 정수 r 에 대하여 (1)의 등식이 성립한다.

방법 2 : 조합의 정의를 이용한 조합론적인 증명

$\binom{n+r+1}{r}$ 은 집합 $A=\{1, 2, \cdots, n+r+1\}$ 의 원소의 개수가 r 인 부분 집합의 개수이다.

한편, 원소의 개수가 r 인 A 의 부분집합 중 $n+r+1$ 을 포함하지 않는 것의

개수는 $\binom{n+r}{r}$, $n+r+1$ 을 포함하지만 $n+r$ 은 포함하지 않는 것의 개수는 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 이다. 일반적으로 $n+1 \leq k \leq n+r+1$ 인 k 에 대하여

$n+r+1, n+r, \cdots, k+1$ 은 포함하지만 k 는 포함하지 않는 원소의 개수가

r 인 부분집합은 나머지 $1, 2, \dots, k-1$ 중에서 $r-(n+r+1-(k+1)+1)$
 $=k-n-1$ 개의 원소를 더 뽑아야 하므로 그 경우의 수는 $\binom{k-1}{k-n-1}$ 이다.

따라서 합의 법칙에 의해

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$

이다.

(2) **방법 1** : 조합의 정의를 이용한 조합론적인 증명

$\{1, 2, \dots, n+1\}$ 에서 $r+1$ 개의 원소를 뽑는 방법의 수는 $\binom{n+1}{r+1}$ 이다.

이런 방법 중 원소의 최소값이 1이 되도록 뽑는 방법의 수는 $\binom{n}{r}$, 원소의
 최소값이 2가 되도록 뽑는 방법의 수는 $\binom{n-1}{r}$, ..., 원소의 최소값이
 $n-r+1$ 이 되도록 뽑는 방법의 수는 $\binom{r}{r}$ 이므로 합의 법칙에 의하여

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

이다.

방법 2 : 도로망에서 최단 경로를 이용한 조합론적인 증명

아래 그림 1.4.2에서 A 에서 B 로 가는 최단 경로의 수는 $\binom{n+1}{r+1}$ 이고 이
 런 최단 경로는 그림에 표시된 $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}, a_{n-r+1}$ 중 반드시 한 길만
 지나게 된다.

$1 \leq k \leq n-r+1$ 인 k 에 대하여 A 에서 B 로 가는 최단 경로 중 a_k 를 지나
 는 방법의 수는 가로가 r , 세로가 $n-k+1-r$ 인 직사각형 모양의 도로망
 에서 최단 경로의 수이므로 $\binom{n-k+1}{r}$ 이다. 따라서 합의 법칙에 의하여

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

이다.

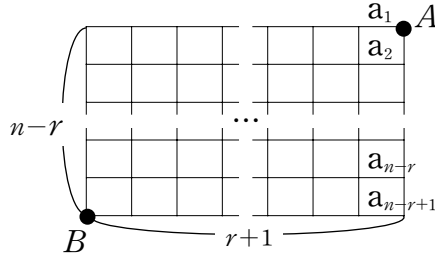


그림 1.4.2

(3) 방법 1 : 조합의 정의를 이용한 조합론적인 증명

m 명의 남자와 n 명의 여자 중에서 r 명의 대표를 뽑는 방법의 수는 $\binom{m+n}{r}$ 이다.

한편, 대표로 뽑힌 r 명 중에 남자 대표의 수는 $0, 1, 2, \dots, r$ 중 하나이고 이 때 여자 대표의 수는 각각 $r, r-1, r-2, \dots, 0$ 이다. $1 \leq k \leq r$ 인 k 에 대하여 남자 대표의 수가 k , 여자 대표의 수가 $r-k$ 가 되도록 대표를 뽑는 방법의 수는 $\binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$ 이므로 m 명의 남자와 n 명의 여자 중에서 r 명의 대표를 뽑는 방법의 수 $\binom{m+n}{r}$ 는 합의 법칙에 의하여

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}$$

이다.

방법 2 : 이항정리를 이용한 방법

등식 $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n$ 에서 x^r 의 계수를 비교하여 보자.

이항정리에 의하여 $(1+x)^{m+n}$ 에서 x^r 의 계수는 $\binom{m+n}{r}$ 이다. 한편,

$$(1+x)^m = \binom{m}{m} x^m + \cdots + \binom{m}{m-k} x^{m-k} + \cdots + \binom{m}{1} x + \binom{m}{0}$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{n}x^n + \cdots + \binom{n}{n-k}x^{n-k} + \cdots + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}$$

이므로 $(1+x)^m(1+x)^n$ 에서 x^r 의 계수는

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

이다. 식 $(1+x)^{m+n}$ 과 $(1+x)^m(1+x)^n$ 에서 x^r 의 계수는 같으므로

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

이다. □

문제 1.4.7

다음 등식이 성립함을 보여라.

$$(1) \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r+1} + \cdots + \binom{m}{m}\binom{n}{r+m} = \binom{m+n}{m+r}$$

$$(2) \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \cdots + \binom{n-m}{0} = \binom{n+1}{m} \quad (\text{단, } n \geq m)$$

예제 1.4.8 $(1+x+x^2+\cdots+x^n)^3$ 의 전개식에서 x^{2n} 의 계수를 구하여라.

풀이>> $(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$ 을 전개할 때 첫 번째, 두 번째, 세 번째 $1+x+x^2+\cdots+x^n$ 에서 각각 x^a, x^b, x^c 를 택하여 그 곱이 x^{2n} 이 되었다고 하자. 그러면

$$a+b+c=2n \quad (0 \leq a, b, c \leq n) \quad (4.2)$$

이고 이 방정식을 만족하는 정수해 (a, b, c) 의 개수가 x^{2n} 의 계수가 된다.

한편, (4.2)를 만족하는 (a, b, c) 의 개수는 방정식 $a+b+c=2n$ 의 음이 아닌 정수해 (a, b, c) 의 개수에서 $a \geq (n+1)$ 또는 $b \geq (n+1)$ 또는 $c \geq (n+1)$

인 정수해 (a, b, c) 의 개수를 빼면 된다. 우선 방정식

$$a+b+c=2n$$

의 음이 아닌 정수해 (a, b, c) 의 개수는

$${}_3H_{2n} = \binom{3+2n-1}{2n} = \binom{2n+2}{2n} = \binom{2n+2}{2}$$

이다. 이제 $a \geq (n+1)$ 인 방정식 $a+b+c=2n$ 의 음이 아닌 정수해 (a, b, c) 의 개수를 구하여 보자. $a_1 = a - (n+1)$ 라 하면

$$a_1+b+c=n-1 \quad (a_1, b, c \geq 0)$$

이고 이 방정식을 만족하는 음이 아닌 정수해 (a_1, b, c) 의 개수는

$${}_3H_{n-1} = \binom{3+n-1-1}{n-1} = \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2}$$

이다. 마찬가지로 $b \geq (n+1)$ 또는 $c \geq (n+1)$ 인 방정식 $a+b+c=2n$ 의 정수해의 수도 각각 $\binom{n+1}{2}$ 이다. 이 세 경우 중 어느 두 경우도 동시에 일어나지 않으므로 방정식 (4.2)의 해의 개수는 $\binom{2n+2}{2} - 3\binom{n+1}{2}$ 이다. 따라서 $(1+x+x^2+\cdots+x^n)^3$ 의 전개식에서 x^{2n} 의 계수는

$$\binom{2n+2}{2} - 3\binom{n+1}{2}$$

이다. □

문제 1.4.8

$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})^2$ 의 전개식에서 다음을 구하여라.

- (1) $k \leq n-1$ 일 때 x^k 의 계수
- (2) $n \leq k \leq 2n-2$ 일 때 x^k 의 계수

예제 1.4.9 집합 $A=\{1, 2, \dots, n\}$ 의 서로 소인 두 부분집합의 순서쌍 (A_1, A_2) 의 개수를 구하여라.

풀이>> 방법 1 : A_1 이 주어지면 A_2 는 $A-A_1$ 의 부분집합 중 어느 것을 택해도 좋다. 원소의 수가 k 인 A_1 을 선택하는 방법의 수는 $\binom{n}{k}$ 이고 A_2 를 선택하는 방법의 수는 2^{n-k} 이므로 순서쌍 (A_1, A_2) 를 선택하는 방법은 곱의 법칙에 의하여

$$\binom{n}{k}2^{n-k}$$

이다. k 는 $0, 1, 2, \dots, n$ 중 하나이므로 서로 소인 A 의 부분집합의 순서쌍 (A_1, A_2) 의 개수는 합의 법칙에 따라

$$\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}2^0 = (1+2)^n = 3^n$$

이다.

방법 2 : 먼저 집합 $A=\{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합은 0 또는 1을 n 개 나열한 순열과 일대일 대응된다. 그러므로 A 의 두 부분집합의 순서쌍 (A_1, A_2) 는 0 또는 1로 이루어진 $2 \times n$ 행렬과 일대일 대응된다. 예를 들어

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A_1=\{1, 3, 5, 7, 9\} \subseteq A,$$

$$A_2=\{2, 3, 5, 7\} \subseteq A,$$

라면

$$A_1 \leftrightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$$

$$A_2 \leftrightarrow (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(A_1, A_2) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

으로 대응된다.

A_1 과 A_2 가 서로 소라면 순서쌍 (A_1, A_2) 에 대응되는 행렬의 모든 열은 적어도 하나의 0을 포함하여야 하므로 각 열은 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 의 3가지 경우가 있고 n 개

의 열이 있으므로 곱의 법칙에 의하여 모두 3^n 개의 경우의 수가 있다. 즉, 집합 $A=\{1, 2, \dots, n\}$ 의 서로 소인 부분집합의 순서쌍 (A_1, A_2) 의 개수는 3^n 이다. $\square$

문제 1.4.9

집합 $\{1, 2, \dots, n\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ 인 k 개의 부분집합의 순서조 $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 의 개수를 구하여라. (힌트 : $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 에 대응되는 0 또는 1로 이루어진 $k \times n$ 행렬의 각 열의 조건을 생각한다.)

정의 1.4.2 $n, n_1, n_2, \dots, n_k$ 를 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 인 음이 아닌 정수라 할 때

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

을 간단히

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

로 나타내고 다항계수라고 한다.

다항계수 $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ 는 n_1 개의 a_1, n_2 개의 $a_2, \dots, n_k$ 개의 a_k 를 일렬로 배열한 순열의 수이다.

예제 1.4.10 다음 물음에 답하여라.

(1) 다항계수 $\binom{10}{2, 3, 5}$ 를 계산하여라.

(2) $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_k}$ 임을 보여라.

풀이>> (1) $\binom{10}{2, 3, 5} = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520$

(2) $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ 는 n_1 개의 a_1 , n_2 개의 a_2 , $\dots$, n_k 개의 a_k 를 일렬로 배열한 순열의 수이다. 그런 순열 중에서 첫 번째가 a_1 인 순열은 나머지 $n-1$ 자리에 n_1-1 개의 a_1 , n_2 개의 a_2 , $\dots$, n_k 개의 a_k 를 일렬로 배열한 것이므로 그 수는

$$\binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_k}$$

이다. 일반적으로 첫 번째가 a_i 인 순열은 나머지 $n-1$ 자리에 n_1 개의 a_1 , n_2 개의 a_2 , $\dots$, n_i-1 개의 a_i , $\dots$, n_k 개의 a_k 를 일렬로 배열한 것이므로 그 수는

$$\binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_k}$$

이다. i 는 $1, 2, \dots, k$ 중에 하나이므로 합의 법칙에 의하여

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_k}$$

이다. □

문제 1.4.10

다음 물음에 답하여라.

(1) 다항계수 $\binom{10}{4, 4, 2}$ 를 계산하여라.

(2) $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2, n_3, \dots, n_k}$ 임을 보여라.

정리 1.4.3 (다항정리) n 이 음이 아닌 정수일 때

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

이다. 단, $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 은 $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ 의 음이 아닌 정수해이다.

【증명】 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ 의 n 개의 곱

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

에서 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ 의 계수는 n 번 중에 x_1 을 n_1 번, x_2 를 n_2 번, $\cdots$, x_k 를 n_k 번 뽑는 방법의 수와 같으므로

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

이다. 따라서

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

이다. □

예제 1.4.11 다음 물음에 답하여라.

- (1) 다항정리를 이용하여 $(a+b+c)^3$ 를 전개하여라.
- (2) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ 의 전개식에서 항의 개수를 구하여라.
- (3) $(x+y+z+w)^7$ 의 전개식에서 $x^2 y^3 z w$ 의 계수를 구하여라.

풀이>> (1) 다항정리에 의하여

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= \sum_{n_1+n_2+n_3=3} \binom{3}{n_1, n_2, n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \\ &= \binom{3}{3,0,0} a^3 + \binom{3}{0,3,0} b^3 + \binom{3}{0,0,3} c^3 + \binom{3}{2,1,0} a^2 b + \binom{3}{2,0,1} a^2 c \\ &\quad + \binom{3}{1,2,0} a b^2 + \binom{3}{0,2,1} b^2 c + \binom{3}{1,0,2} a c^2 + \binom{3}{0,1,2} b c^2 \\ &\quad + \binom{3}{1,1,1} a b c \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2) + 6 a b c \end{aligned}$$

(2) $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ 이 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ 의 전개식의 한 항이라면

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad (n_1, n_2, \cdots, n_k \geq 0)$$

이다. 위의 방정식을 만족하는 음이 아닌 정수해는

$${}_k H_n = \binom{k+n-1}{n}$$

이므로 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ 의 전개식에서 항의 개수는

$${}_k H_n = \binom{k+n-1}{n}$$

이다.

(3) 다항정리에 의하여 $x^2 y^3 z w$ 의 계수는

$$\binom{7}{2, 3, 1, 1} = \frac{7!}{2!3!1!1!} = 420$$

이다. □

문제 1.4.11

다음 물음에 답하여라.

(1) $(x+y+4)^7$ 의 전개식에서 $x^2 y^3$ 의 계수를 구하여라.

(2) $\sum_{(n_1, n_2, n_3)} \binom{n}{n_1, n_2, n_3}$ 의 값을 구하여라.

단, (n_1, n_2, n_3) 은 방정식 $n = n_1 + n_2 + n_3$ 의 음이 아닌 정수해이다.

(3) $(a+b+c)^4$ 의 전개식에서 항의 개수를 구하여라.

예제 1.4.12 $(1+x^2+x^7)^{11}$ 의 전개식에서 x^{16} 의 계수를 구하여라.

풀이>> 다항정리에 의하여

$$(1+x^2+x^7)^{11} = \sum_{a+b+c=11} \binom{11}{a, b, c} 1^a (x^2)^b (x^7)^c$$

$$= \sum_{a+b+c=11} \binom{11}{a, b, c} x^{2b} x^{7c} = \sum_{a+b+c=11} \binom{11}{a, b, c} x^{2b+7c}$$

이므로 x^{16} 의 계수는

$$\sum_{a+b+c=11, 2b+7c=16} \binom{11}{a, b, c}$$

이다.

연립방정식 $a+b+c=11$, $2b+7c=16$ 의 음이 아닌 정수해 (a, b, c) 는

$(3, 8, 0)$ 과 $(8, 1, 2)$ 둘뿐이므로 $(1+x^2+x^7)^{11}$ 의 전개식에서 x^{16} 의 계수는 $\binom{11}{3, 8, 0} + \binom{11}{8, 1, 2} = 660$ 이다. $\square$

문제 1.4.12

$(1+x^3+x^4)^7$ 의 전개식에서 x^{16} 의 계수를 구하여라.

지금까지 살펴본 이항계수 $\binom{n}{k}$ 는 n, k 가 모두 음이 아닌 정수이었다. 이제 α 가 임의의 실수일 때 확장된 이항계수 $\binom{\alpha}{k}$ 의 정의와 간단한 성질을 살펴보자.

정의 1.4.4 임의의 실수 α 와 음이 아닌 정수 k 에 대하여 확장된 이항계수 $\binom{\alpha}{k}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & (k \geq 1) \\ 1 & (k=0) \end{cases}$$

예제 1.4.13 다음 등식이 성립함을 보여라. (단, n, k 는 자연수)

$$(1) \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$(2) \binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$$

$$(3) \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k}$$

풀이>> (1) $\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$
 $= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k {}_nH_k$

$$(2) \binom{1/2}{k} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \frac{(2k-2)!}{k! \cdot 2^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (k-2)(k-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$$

(3) $k=1$ 이면 좌변은 α , 우변은 $1 + (\alpha-1) = \alpha$ 이므로 등식이 성립한다.

이제 $k \geq 2$ 라 하자. 그러면

$$\binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k}$$

$$= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!}$$

$$= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} (k + \alpha - k) = \binom{\alpha}{k} \quad \square$$

문제 1.4.13

다음 등식이 성립함을 보여라. (단, n 은 자연수)

$$(1) (-1)^n \binom{-1/2}{n} 2^{2n} = \binom{2n}{n}$$

$$(2) (-1)^n \binom{1/2}{n} 2^{2n} = -\frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

무한급수의 수렴과 발산, 미분을 이용하면 다음과 같은 일반화된 이항정리를 증명할 수 있다. 그러나 그 증명이 해석적인 것이어서 여기서는 증명 없이 정리만 기술한다.

정리 1.4.5 (일반화된 이항정리)

α 가 임의의 실수일 때

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

이다. (단, $|x| < 1$)

□

예제 1.4.14 일반화된 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $\frac{1}{(1+x)^k}$ (단, k 는 자연수)

(2) $\sqrt{1+x}$

풀이>> 일반화된 이항정리와 예제 1.4.13의 (1)과 (2)를 이용하면

$$(1) \frac{1}{(1+x)^k} = (1+x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k-1}{n} x^n$$

$$(2) \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

이다.

□

문제 1.4.14

일반화된 이항정리를 이용하여 다음식을 전개하여라.

(1) $\frac{1}{1-x}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

>> 연습문제 1.4

1 수학적 귀납법을 이용하여 이항정리를 증명하여라.

2 이항정리 또는 다항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x - 3y)^6$

(2) $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$

(3) $(x + y + z)^4$

3 다음을 구하여라.

(1) $(x + y)^{10}$ 의 전개식에서 x^3y^7 의 계수

(2) $(1 + 3x)^5(2 - x)^4$ 의 전개식에서 x^3 의 계수

(3) $(2x - 3y + 4)^7$ 의 전개식에서 x^3y^2 의 계수

4 다음 물음에 답하여라.

(1) 등식 $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n$ 에서 x^k 의 계수를 비교하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

(2) 등식 $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(1 + x)^n$ 에서 x^n 의 계수를 비교하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

5 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $1 \cdot \binom{n}{0} + 2 \cdot \binom{n}{1} + 3 \cdot \binom{n}{2} + \dots + (n+1) \cdot \binom{n}{n}$

$$(2) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}$$

$$(3) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1}$$

$$(4) \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

6 $(x+r_1)(x+r_2)\cdots(x+r_n)$ 의 전개식에서 다음을 구하여라.

- (1) 상수항
- (2) x^{n-1} 의 계수
- (3) x^{n-2} 의 계수
- (4) x^{n-k} 의 계수 (단, $0 \leq k \leq n$)

7 이항정리를 이용하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \cdots + \binom{n-m}{0} = \binom{n+1}{m}$$

8 조합의 정의를 이용하여

$$(n-r) \binom{n+r-1}{r} \binom{n}{r} = n \binom{n+r-1}{2r} \binom{2r}{r}$$

임을 보여라.

9 수학적귀납법을 이용하여

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

임을 보여라.

10 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\binom{r}{r} \binom{m+n-r}{s} + \binom{r+1}{r} \binom{m+n-r-1}{s} + \cdots + \binom{m+n-s}{r} \binom{s}{s} = \binom{m+n+1}{r+s+1}$$

11 m, n 이 자연수일 때

$$\binom{n}{0} \binom{n}{m} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{m-1} + \cdots + \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} + \cdots + \binom{n}{m} \binom{n-m}{0} = 2^m \binom{n}{m}$$

임을 보여라. (단, $m \leq n$)

12 $(1+x+x^2+\cdots)^n$ 의 전개식에서 x^k 의 계수를 구하여라.

13 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 집합 A 의 한 부분집합을 선택하고 선택한 부분집합에서 한 원소를 선택하는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 집합 A 의 한 원소를 선택하고 선택한 원소를 포함하는 A 의 부분집합을 선택하는 방법의 수를 구하여라.
- (3) 위 (1), (2)를 이용하여

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

임을 보여라.

14 등식 $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ 을 이용하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n$ 을 계산하여라.
- (2) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-2)(n-1)n$ 을 계산하여라.

(3) $n^2 = a \cdot \binom{n}{2} + b \cdot \binom{n}{1}$ 이 되도록 a, b 를 정하고 이를 이용하여

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

을 계산하여라.

(4) $n^3 = c \cdot \binom{n}{3} + d \cdot \binom{n}{2} + e \cdot \binom{n}{1}$ 이 되도록 c, d, e 를 정하고 이를 이용하여

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

을 계산하여라.

15 $(1+x+x^2)^n$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는

$$1 + \frac{n(n-1)}{(1!)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2!)^2} + \cdots$$

임을 보여라.

16 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 을 이용하여 $\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$ 임을 보여라.

17 이항정리와 적분을 이용하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

제5절 수의 분할

똑같은 n 개의 공을 똑같은 세 상자에 빈 상자가 없도록 넣는 방법을 생각하여 보자. 공과 상자가 각각 구별되지 않으므로 n 을 세 자연수로 분할하여 그 수만큼의 공을 각 상자에 넣으면 된다. 이처럼 자연수를 몇 개의 자연수로 분할하는 방법에 대하여 알아보자.

예제 1.5.1 6을 $3+2+1$ 과 같이 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법은 모두 몇 가지인가? 단, 합의 순서만 다른 것은 모두 같은 것으로 간주한다.

풀이>> 6

$$5+1, 4+2, 3+3$$

$$4+1+1, 3+2+1, 2+2+2$$

$$3+1+1+1, 2+2+1+1$$

$$2+1+1+1+1$$

$$1+1+1+1+1+1$$

따라서 6을 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법은 모두 11가지이다. $\square$

문제 1.5.1

5를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법은 모두 몇 가지인가? 단, 합의 순서만 다른 것은 모두 같은 것으로 간주한다.

정의 1.5.1 자연수 n 에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 를 n 의 분할(partition)이라고 한다.

(i) $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ (단, $n_1, n_2, \dots, n_k$ 는 자연수)

(ii) $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

$\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 가 n 의 분할이면 $\lambda \vdash n$ 으로 나타내고 각 n_i 를 분할 λ 의 부분(part)이라 한다. 또 n 의 모든 분할의 개수를 $p(n)$, k 개의 부분을 가진 n 의 분할의 수를 $p(n, k)$ 로 나타낸다. 그러므로

$$p(n) = p(n, 1) + p(n, 2) + \dots + p(n, n)$$

이다. 예를 들어 예제 1.5.1로부터 6의 모든 분할과 $p(6, k)$ 값은 다음과 같다.

6의 분할	$p(6, k)$
(6)	$p(6, 1) = 1$
(5, 1), (4, 2), (3, 3)	$p(6, 2) = 3$
(4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2)	$p(6, 3) = 3$
(3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1)	$p(6, 4) = 2$
(2, 1, 1, 1, 1)	$p(6, 5) = 1$
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	$p(6, 6) = 1$

표 1.5.1

따라서

$$p(6) = p(6, 1) + p(6, 2) + p(6, 3) + p(6, 4) + p(6, 5) + p(6, 6) = 11$$

이다. 참고로 $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ 이며 $p(50) = 204226$, $p(100) = 190,569,292$ 이다.

정의 1.5.2 $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 를 n 의 분할이라 하자. 첫째 행에 n_1 칸, 둘째 행에 n_2 칸, $\dots$, k 번째 행에 n_k 칸을 그린 그림을 분할 λ 의 페러다이어그램(Ferrer's diagram)이라 한다. 아래 그림은 6의 분할인 (4, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 1, 1)의 페러다이어그램을 나타낸 것이다.

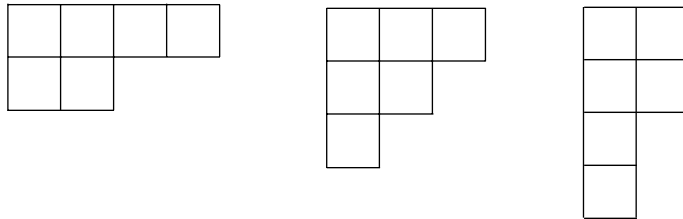


그림 1.5.1

주어진 분할을 페러다이어그램으로 나타내면 분할의 부분의 수나 가장 큰 부분의 크기 등 분할을 보다 쉽게 이해할 수 있다. 즉, 분할 $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 의 페러다이어그램에서 행의 수는 λ 의 부분의 수 k 를 나타내며, 열의 수는 분할 λ 의 가장 큰 부분인 n_1 을 나타낸다.

예제 1.5.2 분할 $\lambda = (8, 6, 5, 3, 1) \vdash 23$ 의 페러다이어그램을 그려라. 또 λ 의 페러다이어그램에서 첫째 열, 둘째 열, ...에 있는 칸의 수를 각각 $m_1, m_2, \dots$ 라 하면 $\lambda' = (m_1, m_2, \dots)$ 도 23의 분할임을 보여라.

풀이>>

$$\lambda = (8, 6, 5, 3, 1)$$

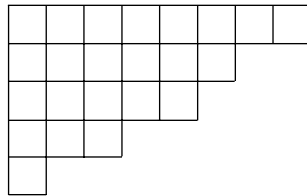


그림 1.5.2

위의 그림에서 차례로 각 열의 칸을 세면 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1이므로 $\lambda' = (5, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1)$ 도 23의 분할이다. □

문제 1.5.2

분할 $\mu = (7, 5, 5, 2, 1)$ 의 페러다이어그램을 그려라.

예제 1.5.3 다음 물음에 답하여라.

- (1) 6개의 같은 종류의 공을 세 개의 같은 종류의 상자에 넣을 때 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 6개의 같은 종류의 공을 세 개의 같은 종류의 상자에 넣는 방법의 수를 구하여라.

- 풀이>>** (1) 빈 상자가 없고 세 상자 안의 공을 합하면 6이므로 상자 안의 공의 수는 3개의 부분을 갖는 6의 분할이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $p(6, 3)$ 이다.
- (2) 6개의 같은 종류의 공을 세 개의 같은 종류의 상자에 넣었다고 하자. 세 상자 안의 공을 합하면 6이고 빈 상자가 있을 수도 있으므로 상자 안의 공의 수는 많아야 3개의 부분을 갖는 6의 분할을 이룬다. 따라서 구하는 방법의 수는 $p(6, 1) + p(6, 2) + p(6, 3)$ 이다. $\square$

문제 1.5.3

다음 물음에 답하여라.

- (1) 5개의 같은 종류의 공을 세 개의 같은 종류의 상자에 넣는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 11개의 같은 종류의 공을 세 개의 같은 종류의 상자에 넣을 때 각 상자에 2개 이상의 공이 있도록 넣는 방법의 수를 구하여라.

정의 1.5.3 $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 를 n 의 분할이라 하자. 분할 λ 의 페르다이어그램에서 i 번째 열에 있는 칸의 수를 m_i 라 하면 $\lambda' = (m_1, m_2, \dots)$ 도 n 의 분할이 된다. 이런 방법으로 얻어진 분할을 λ 의 공액분할(conjugate partition)이라 한다.

λ' 이 λ 의 공액분할이면 λ' 의 페르다이어그램은 λ 의 페르다이어그램을 주대각선에 대하여 대칭시킨 것이다.

예제 1.5.4 $\lambda = (6, 6, 5, 4, 2, 1)$ 일 때 λ 의 페르다이어그램을 그리고, 이를 이용하여 λ 의 공액분할 λ' 을 구하여라.

풀이>> 다음 그림 1.5.3처럼 λ 의 페르다이어그램을 그리면 그 열에 있는 칸의 수가 각각 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2이므로 λ 의 공액분할은 $\lambda' = (6, 5, 4, 4, 3, 2)$ 이다.

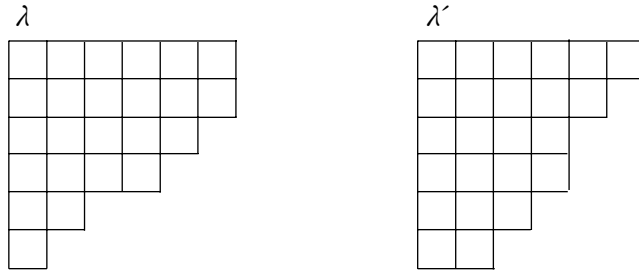


그림 1.5.3



문제 1.5.4

자연수 5의 모든 분할의 공액분할을 구하여라.

예제 1.5.5 각 부분이 m 이하인 n 의 분할의 수는 부분의 수가 m 이하인 n 의 분할의 수와 같음을 보여라.

풀이>> 집합 A 와 B 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \{\lambda \mid \lambda \text{는 각 부분이 } m \text{ 이하인 } n \text{의 분할}\}$$

$$B = \{\lambda \mid \lambda \text{는 부분의 수가 } m \text{ 이하인 } n \text{의 분할}\}$$

이제 집합 A 에서 B 로 가는 함수 $f: A \rightarrow B$ 를

$$f(\lambda) = \lambda \text{의 공액분할} = \lambda'$$

으로 정의하자. 예를 들어 $n=6$ 이고 $m=3$ 이면

$$A = \{(3,3), (3,2,1), (2,2,2), (3,1,1,1), (2,2,1,1), (2,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1)\}$$

$$B = \{(6), (5,1), (4,2), (3,3), (4,1,1), (3,2,1), (2,2,2)\},$$

$$f((3,3)) = (2,2,2), \quad f((3,2,1)) = (3,2,1), \quad f((2,2,2)) = (3,3),$$

$$f((3,1,1,1)) = (4,1,1), \quad f((2,2,1,1)) = (4,2), \quad f((2,1,1,1,1)) = (5,1)$$

$$f((1,1,1,1,1,1)) = (6)$$

이다. 분명히 f 는 역함수를 가짐으로 일대일대응 함수이다. 따라서 $|A| = |B|$ 이다. 즉, 각 부분이 m 이하인 n 의 분할의 수는 부분의 수가 m 이하인 n 의 분할의 수와 같다. $\square$

문제 1.5.5

10개의 같은 종류의 공을 3개의 같은 종류의 상자에 넣을 때 각 상자 안에 많아야 5개가 되도록 하는 방법의 수는 10개의 같은 종류의 공을 5개의 같은 종류의 상자에 넣을 때 각 상자 안에 들어 있는 공의 수가 3 이하가 되도록 하는 방법의 수와 같음을 보여라.

예제 1.5.6 $p(n, r) = p(n-1, r-1) + p(n-r, r)$ 임을 보여라.

풀이>> r 개의 부분을 갖고 있는 n 의 분할 λ 를 다음과 같은 두 가지 경우로 나누어 생각하여 보자.

① **1이 분할 λ 의 부분일 경우**: 1이 분할 λ 의 부분이라면 1을 제외하면 나머지는 $r-1$ 개의 부분을 가진 $n-1$ 의 분할이 된다.

역으로, $r-1$ 개의 부분을 가진 $n-1$ 의 분할이 주어지면 마지막에 1을 첨가하여 1이 부분이고 부분의 수가 r 개인 n 의 분할을 만들 수 있다. 위의 두 대응은 서로 역이므로 일대일대응이고, 따라서 1이 부분이고 부분의 수가 r 인 n 의 분할의 수는 $r-1$ 개의 부분을 갖는 $n-1$ 의 분할의 수 $p(n-1, r-1)$ 와 같다.

예를 들어 $n=6, r=3$ 이면

$$\begin{aligned} C &= \{\lambda \mid \lambda \text{는 } 1 \text{이 한 부분이고 } 3 \text{개의 부분을 갖는 } 6 \text{의 분할}\} \\ &= \{(4, 1, 1), (3, 2, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \{\lambda \mid \lambda \text{는 } 2 \text{개의 부분을 갖는 } 5 \text{의 분할}\} \\ &= \{(4, 1), (3, 2)\} \end{aligned}$$

이고, 다음 그림 1.5.4처럼 $(4, 1, 1) \leftrightarrow (4, 1), (3, 2, 1) \leftrightarrow (3, 2)$ 로 대응된다.

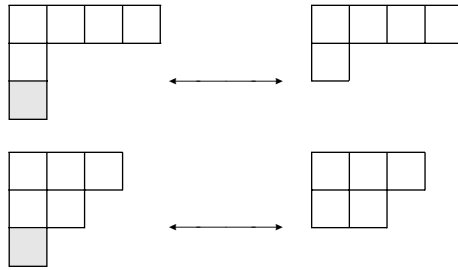


그림 1.5.4

② 1이 분할 λ 의 부분이 아닐 경우 : λ 의 페러다이어그램에서 첫 번째 열을 제외 하면 나머지는 r 개의 부분을 갖는 $n-r$ 의 분할이 된다. 역으로 r 개의 부분을 갖는 $n-r$ 의 분할 μ 가 주어지면 μ 의 각 부분에 1씩 더하면 r 개의 부분을 갖고 각 부분이 2 이상인 n 의 분할이 된다. 이 대응은 분명히 일대일 대응이므로 r 개의 부분을 갖고 각 부분이 2 이상인 n 의 분할의 수는 r 개의 부분을 갖는 $n-r$ 의 분할의 수 $p(n-r, r)$ 와 같다. 예를 들어, $n=6$, $r=3$ 이면

$$\begin{aligned} E &= \{ \lambda \mid \lambda \text{는 각 부분이 2 이상이고 3개의 부분을 갖고 있는 6의 분할} \} \\ &= \{(2, 2, 2)\} \\ F &= \{ \lambda \mid \lambda \text{는 3개의 부분을 갖는 3의 분할} \} \\ &= \{(1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

이고 아래 그림 1.5.5처럼 $(2, 2, 2) \leftrightarrow (1, 1, 1)$ 로 대응된다.

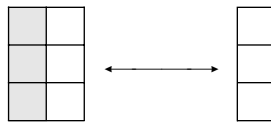


그림 1.5.5

위의 ①과 ②는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 따라

$$p(n, r) = p(n-1, r-1) + p(n-r, r)$$

이다. □

문제 1.5.6

다음 표는 점화식 $p(n, r) = p(n-1, r-1) + p(n-r, r)$ 를 이용하여 $n=10$ 까지 $p(n, k), p(n)$ 을 구하기 위한 표이다. 빈 칸을 채워 표를 완성하여라.

n	$p(n,1)$	$p(n,2)$	$p(n,3)$	$p(n,4)$	$p(n,5)$	$p(n,6)$	$p(n,7)$	$p(n,8)$	$p(n,9)$	$p(n,10)$	$\cdots$	$p(n)$
1	1										$\cdots$	1
2	1	1									$\cdots$	2
3	1	1	1								$\cdots$	3
4	1	2	1	1							$\cdots$	5
5	1	2	2	1	1						$\cdots$	7
6	1	3	3	2	1	1					$\cdots$	11
7											$\cdots$	
8											$\cdots$	
9											$\cdots$	
10											$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$

표 1.5.2

예제 1.5.7 n 의 분할 중 부분이 모두 다르고 각 부분이 홀수인 분할의 수는 페르다이어그램이 주대각선에 관하여 대칭인 n 의 분할의 수와 같음을 보여라.

풀이>> $\lambda = (n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 를 페르다이어그램이 주대각선에 관하여 대칭인 n 의 분할이라 하자. λ 의 페르다이어그램에 있는 주대각선의 칸 수가 t 라면 $1 \leq i \leq t$ 인 i 에 대하여

$$m_i = 2n_i - (2i - 1)$$

라고 하자. 즉 m_i 는 λ 의 페르다이어그램에서 i 번째 행 또는 i 번째 열에 있는 칸의 수이다. 여기서 m_i 는 모두 홀수이고, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$ 이므로 m_i 는 모두 다르다. 따라서 $\mu = (m_1, m_2, \cdots, m_t)$ 는 부분이 서로 다른 홀수인 n 의 분할이다. 예를 들어 $\lambda = (6, 4, 3, 2, 1, 1)$ 이라면 아래 그림 1.5.6에서 보듯이 $m_1 = 11, m_2 = 5, m_3 = 1$ 이고 $\mu = (11, 5, 1)$ 이다.

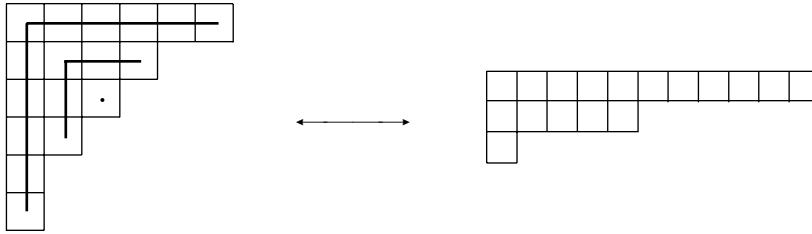


그림 1.5.6

위의 대응은 분명히 역이 가능하므로 일대일대응이다. 따라서 부분이 모두 다르고 각 부분이 홀수인 n 의 분할의 수는 페르다이어그램이 주대각선에 관하여 대칭인 n 의 분할의 수와 같다. $\square$

문제 1.5.7

3개의 부분을 갖는 n 의 분할의 수는, 각 부분이 n 보다 작고 3개의 부분을 갖는 $2n$ 분할의 수와 같음을 보여라.

정의 1.5.4 n 의 분할 λ 에서 부분 1의 수가 a_1 , 부분 2의 수가 a_2 , ..., 부분 n 의 수가 a_n 이라면 $\lambda = 1^{a_1} 2^{a_2} \cdots n^{a_n}$ 으로 나타낸다.

예를 들어 $\lambda = (7, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$ 이라면 $\lambda = 1^3 2^2 3 5^2 7$ 로 나타낸다.

예제 1.5.8 n 이 자연수일 때 다음 물음에 답하여라.

- (1) 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 n 의 분할의 수와 같음을 보여라.
- (2) 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

풀이>> (1) 집합 A 와 B 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n, x_i \text{는 음이 아닌 정수}\}$$

$$B = \{\lambda \mid \lambda \text{는 } n \text{의 분할}\}$$

이제 함수 $f: A \rightarrow B$ 를

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1^{x_1} 2^{x_2} \dots n^{x_n}$$

으로 정의하자. 그러면 함수 f 는 일대일대응 함수이고 따라서 $|A| = |B|$ 이다. 즉, 위 (1)에 있는 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수는 n 의 분할의 수와 같다.

예를 들어, 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 7x_7 = 7$ 의 해 $(1, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$ 의 f 의 함수값은 $f((1, 0, 2, 0, 0, 0, 0)) = 13^2 = (3, 3, 1) \vdash 7$ 이다.

(2) 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$ 의 음이 아닌 정수해는 위의 (1)의 풀이에 있는 함수 f 에 의하여 각 부분이 3을 넘지 않는 n 의 분할과 일대일대응된다. 또, 예제 1.5.5에 의해 각 부분이 3을 넘지 않는 n 의 분할의 수는 많아야 3개의 부분을 갖고 있는 n 의 분할의 수와 같다. 따라서 구하는 수는

$$p(n, 1) + p(n, 2) + p(n, 3)$$

이다. □

문제 1.5.8

다음 물음에 답하여라.

- (1) 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.
- (2) 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

>> 연습문제 1.5

1 7의 분할을 모두 구하여 $p(7,1), p(7,2), p(7,3), p(7,4), p(7,5), p(7,6), p(7,7)$ 를 구하여라. 또 이를 이용하여 7의 분할의 수 $p(7)$ 을 구하여라.

2 위의 문제 1을 이용하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 각 부분이 3을 넘지 않는 7의 분할을 모두 구하여라.
- (2) 많아야 3개의 부분을 갖고 있는 7의 분할을 모두 구하여라.
- (3) 예제 1.5.5의 풀이를 참조하여 각각 (1)과 (2)에 있는 분할로 이루어진 두 집합 사이의 일대일 대응 함수 f 를 만들어라.

3 위의 문제 1을 이용하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 7개의 똑같은 공을 똑같은 세 상자에 넣을 때 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 7개의 똑같은 공을 똑같은 세 상자에 넣는 방법의 수를 구하여라.
- (3) 7개의 똑같은 공을 똑같은 세 상자에 넣을 때 각 상자에 공이 넷을 넘지 못하도록 넣는 방법의 수를 구하여라.

4 다음 물음에 답하여라.

- (1) 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 = 7$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.
- (2) 방정식 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

5 페르다이어그램이 주대각선에 대칭인 9의 분할의 수를 구하여라.

6 n 의 분할에서 $p(n,2)$ 과 $p(n,n-1)$ 의 값을 구하여라.

7 n 의 분할에서 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$p(n, r) = p(n-r, 1) + p(n-r, 2) + \cdots + p(n-r, r)$$

8 각 부분이 모두 짝수인 n 의 분할의 수는 각 부분이 짝수번씩 나오는 n 의 분할의 수와 같음을 보여라.

9 n 의 분할의 수는 n 부분을 갖는 $2n$ 의 분할의 수와 같음을 보여라.

10 $2n+k$ 의 분할에서 $n+k$ 부분을 갖고 있는 분할의 수는 n 부분을 갖는 $2n$ 의 분할의 수와 같음을 보여라.

11 각 부분이 k 이하인 n 의 분할의 수는 $n+k$ 의 분할 중에서 k 부분을 갖는 분할의 수와 같음을 보여라.

12 서로 다른 k 부분을 갖는 $n + \frac{k(k+1)}{2}$ 의 분할의 수는 n 부분을 갖는 $n+k$ 의 분할의 수와 같음을 보여라.

13 20의 분할 중에서 각 부분이 10 이하이며 7개의 부분을 갖는 분할의 수는 각 부분이 8 이하이며 9개의 부분을 갖는 22의 분할의 수와 같음을 보여라.

14 자연수 n, k 에 대하여

$$n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k \quad (x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_k \geq 0)$$

을 만족하는 정수해의 개수를 $q(n, k)$ 로 나타내자. (단, $q(0, 0) = 1$)

예를 들어 6은

$$6 + 0 + 0, 5 + 1 + 0, 4 + 2 + 0, 4 + 1 + 1, 3 + 3 + 0, 3 + 2 + 1, 2 + 2 + 2$$

로 나타낼 수 있으므로 $q(6, 3) = 7$ 이다.

(1) $q(7, 3)$ 을 구하여라.

(2) $p(n, k) = q(n - k, k)$ 임을 보여라.

15 부분이 모두 다른 n 의 분할의 수를 $pd(n)$ 이라 하고, 부분이 모두 홀수인 n 의 분할의 수를 $po(n)$ 이라 하자.

(1) 7 이하의 자연수 n 에 대하여 $pd(n)$ 을 구하여라.

(2) 7 이하의 자연수 n 에 대하여 $po(n)$ 을 구하여라.

(3) 두 조건을 만족하는 집합을 각각 만들고 그 두 집합 사이에 일대일 대응 함수를 찾아 $po(n) = pd(n)$ 임을 보여라.

제6절 집합의 분할

수의 분할에서는 같은 종류의 공을 같은 종류의 상자에 넣는 방법에 대하여 살펴 보았다. 이제 서로 다른 n 개의 공을 같은 종류의 세 상자에 넣어보자. 우선 공을 세 부분으로 나누고 나뉜 세 부분의 공을 각각의 상자에 넣으면 된다. 이것은 집합을 서로 소인 몇 개의 부분집합으로 나누는 방법과 같다.

정의 1.6.1 n 개의 원소를 갖고 있는 집합을 n -집합이라 하자. 아래 그림 1.6.1처럼 n -집합 A 가

- (i) $A = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ 이고
- (ii) $B_1, B_2, \cdots, B_k \neq \phi$ 이며
- (iii) $i \neq j$ 인 모든 i, j 에 대하여 $B_i \cap B_j = \phi$

이면 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 을 집합 A 의 **분할**(set partition)이라 하고 각 B_i 를 이 분할의 **블록**(block)이라고 한다.

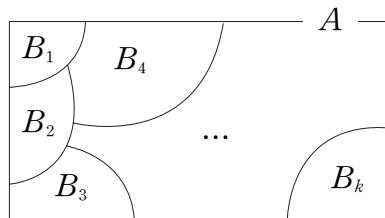


그림 1.6.1

k 개의 블록을 가진 n -집합의 분할의 수를 **제2종 스털링수**(Stirling numbers of the second kind)라 하고 $S(n, k)$ 로 나타내며 n -집합의 모든 분할의 수를 **벨수**(Bell number)라 하고 $B(n)$ 으로 나타낸다. 그러므로 벨수 $B(n)$ 은

$$B(n) = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$$

이다.

예제 1.6.1 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 라 하자. 집합 A 의 모든 분할을 구하여 제2종 스털링 수 $S(4, 1), S(4, 2), S(4, 3), S(4, 4)$ 와 벨수 $B(4)$ 를 구하여라.

풀이>> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} &= \{1\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2\} \cup \{1, 3, 4\} = \{3\} \cup \{1, 2, 4\} = \{4\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \\ &= \{1, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \\ &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{2, 4\} = \{1\} \cup \{4\} \cup \{2, 3\} = \{2\} \cup \{3\} \cup \{1, 4\} \\ &= \{2\} \cup \{4\} \cup \{1, 3\} = \{3\} \cup \{4\} \cup \{1, 2\} \\ &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

- (i) 한 블록을 갖는 A 의 분할 : $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$
- (ii) 두 블록을 갖는 A 의 분할 : $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\},$
 $\{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\},$
- (iii) 세 블록을 갖는 A 의 분할 : $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\},$
 $\{\{2\}, \{3\}, \{1, 4\}\}, \{\{2\}, \{4\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$
- (iv) 네 블록을 갖는 A 의 분할 : $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

이다. 따라서 제2종 스털링수는

$$S(4, 1) = 1, S(4, 2) = 7, S(4, 3) = 6, S(4, 4) = 1$$

이고 벨수 $B(4) = S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) + S(4, 4) = 15$ 이다. □

문제 1.6.1

집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 라 하자. A 의 모든 분할을 나열하여 제2종 스털링수 $S(3, 1), S(3, 2), S(3, 3)$ 을 구하고 벨수 $B(3)$ 을 구하여라.

예제 1.6.2 다음 물음에 답하여라.

- (1) 서로 다른 n 개의 공을 똑같은 종류의 3개의 상자에 넣을 때 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 서로 다른 n 개의 공을 똑같은 종류의 3개의 상자에 넣는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> (1) 서로 다른 n 개의 공을 빈 상자가 없도록 똑같은 3개의 상자에 넣었다고 하자. 상자에 있는 공의 집합을 각각 B_1, B_2, B_3 이라 하면 집합 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 는 세 블록을 갖는 전체 공의 집합의 분할이 된다. 그러므로 위의 조건을 만족하도록 공을 넣는 방법의 수는 세 블록을 갖는 n -집합의 분할의 수인 $S(n, 3)$ 이다.

- (2) 빈 상자가 있을 수 있으므로 실제 사용한 상자의 수는 1 또는 2 또는 3이다. 그러므로 구하는 방법의 수는 위 (1)과 합집의 법칙을 이용하여

$$S(n, 1) + S(n, 2) + S(n, 3)$$

이다. □

문제 1.6.2

다음 경우의 수를 구하여라.

- (1) 서로 다른 4개의 공을 똑같은 종류의 2개의 상자에 넣을 때 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수
- (2) 서로 다른 4개의 공을 똑같은 종류의 2개의 상자에 넣는 방법의 수

예제 1.6.3 n 과 k 를 $n \geq k$ 인 자연수라 할 때

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \times S(n, k)$$

임을 보여라.

풀이>> $A = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ 이라 하고 k 개의 블록을 갖는 집합 A 의 분할을 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각하여 보자.

- ① $n+1$ 이 홀로 한 블록을 이룰 경우 : 한 블록 $\{n+1\}$ 을 제외한 $k-1$ 개의 블록이 집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 분할을 이루므로 $n+1$ 이 홀로 한 블록을 이루는 A 의 분할의 수는 $S(n, k-1)$ 이다.
- ② $n+1$ 이 다른 원소와 함께 블록을 이룰 경우 : $n+1$ 을 제외하면 k 개의 블록을 갖는 집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 분할이 되고 그런 분할의 수는 $S(n, k)$ 이다. $n+1$ 을 k 개의 블록 중 하나의 블록에 넣는 방법의 수는 k 이므로 $n+1$ 이 다른 원소와 함께 블록을 이루는 A 의 분할의 수는 곱의 법칙에 의하여 $k \times S(n, k)$ 이다.

위의 ①과 ②는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 따라

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \times S(n, k)$$

이다. □

문제 1.6.3

다음 표는 점화식 $S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \times S(n, k)$ 를 이용하여 $n=8$ 까지 $S(n, k)$, $B(n)$ 을 구하기 위한 표이다. 빈 칸을 채워 표를 완성하여라.

n	$S(n,1)$	$S(n,2)$	$S(n,3)$	$S(n,4)$	$S(n,5)$	$S(n,6)$	$S(n,7)$	$S(n,8)$	...	$B(n)$
1	1								...	1
2	1	1							...	2
3	1	3	1						...	5
4	1	7	6	1					...	15
5									...	
6									...	
7									...	
8									...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

예제 1.6.4 $n \geq 2$ 인 자연수일 때

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$

임을 보여라.

풀이>> $S(n, 2)$ 는 n -집합 A 를 두 블록 B_1, B_2 로 분할하는 경우의 수이다. 이런 분할에서 B_1 이 주어지면 $B_2 = A - B_1$ 으로 결정된다. B_1 은 공집합이나 전체집합이 아닌 A 의 부분집합이므로 B_1 을 뽑는 방법의 수는 $2^n - 2$ 이다. 두 블록 사이에 순서가 없기 때문에 B_1 과 B_2 를 서로 바꾸어도 같은 분할이 된다. 예를 들어, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고 $B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{4, 5\}$ 이면 집합 A 의 분할

$$\{B_1, B_2\} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\} = \{\{4, 5\}, \{1, 2, 3\}\} = \{B_2, B_1\}$$

이다. 그러므로 $S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$ 이다. □

문제 1.6.4

n 이 $n \geq 2$ 인 자연수일 때

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

임을 보여라.

예제 1.6.5 A 가 n -집합, B 가 m -집합일 때 A 에서 B 로 가는 전사함수의 개수는 $m!S(n, m)$ 임을 보여라. (단, $n \geq m$)

풀이>> 집합 A 를 m 개의 블록으로 나누고 m 개의 블록을 집합 B 의 원소에 일대일 대응시키면 A 에서 B 로 가는 전사함수가 된다. 집합 A 를 m 개의 블록으로 나누는 방법의 수는 $S(n, m)$ 이고 이 m 개의 블록을 m -집합 B 의 원소에 일대일 대응시키는 방법의 수는 $m!$ 이므로 n -집합 A 에서 m -집합 B 로 가는 모든 전사함수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $m!S(n, m)$ 이다. □

문제 1.6.5

8-집합 A 에서 3-집합 B 로 가는 전사함수의 개수를 구하여라.

예제 1.6.6 X 를 n -집합, Y 를 m -집합이라 하자. (단, $n \geq m$)

(1) X 에서 Y 로 가는 함수로 치역의 원소의 개수가 k 인 함수의 개수는

$$\binom{m}{k} S(n, k) k! \text{임을 보여라.}$$

(2) 위 (1)을 이용하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$m^n = \binom{m}{1} S(n, 1) 1! + \cdots + \binom{m}{m} S(n, m) m!$$

풀이>> (1) 치역의 원소의 개수가 k 인 함수는 k 개 원소를 갖는 Y 의 부분집합 Y_k 를 선택하고 X 에서 Y_k 로 가는 전사함수로 생각할 수 있다. Y_k 를 선택하는 방법의 수는 $\binom{m}{k}$ 이고 X 에서 Y_k 로 가는 전사함수의 개수는 $S(n, k) k!$ 이므로 구하는 함수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $\binom{m}{k} S(n, k) k!$ 이다.

(2) X 에서 Y 로 가는 함수의 수는 m^n 이다. 한편, X 에서 Y 로 가는 함수는 치역의 원소의 개수가 $1, 2, \dots, m$ 중의 하나이고 치역의 원소의 개수가 k 인 함수의 개수는 위 (1)에 의하여 $\binom{m}{k} S(n, k) k!$ 이다. 따라서 합의 법칙에 의하여

$$m^n = \binom{m}{1} S(n, 1) 1! + \binom{m}{2} S(n, 2) 2! + \cdots + \binom{m}{m} S(n, m) m!$$

이다. □

문제 1.6.6

자연수 n 에 대하여 $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 이라 정의하자. 아래 제시한 방법으로 다음 등식이 성립함을 보여라. (단, $(x)_0 = 1$)

$$\sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k = x^n$$

- (1) 점화식 $S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \times S(n, k)$ 을 이용한 수학적귀납법
 (2) 예제 1.6.6-(2)의 등식을 이용한 방법

위에서 어떤 조건을 갖는 분할의 수는 제2종 스털링수나 벨수로 나타낼 수 있었다.
 원소의 수가 제2종 스털링수나 벨수로 표현되는 또 다른 집합을 생각하여 보자.

정의 1.6.2 함수 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 는 수열 $f(1)f(2)\dots f(n)$ 로 나타낼 수 있다. 예를 들어 $n=4, k=3$ 이고 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1, f(4)=1$ 이면 $f=2311$ 로 나타낸다. 함수 $f=w_1w_2\dots w_n$ 이 다음 조건을 만족하면 함수 f 를 **RG함수**(restricted growth function)라고 한다.

$$\begin{cases} w_1=1 \\ w_i \leq \text{Max} \{w_1+1, w_2+1, \dots, w_{i-1}+1\} \quad (\text{단}, 2 \leq i \leq n) \end{cases}$$

즉, $f=w_1w_2\dots w_n$ 이 RG함수이면 i 번째 수 w_i 는 그 앞에 있는 수들보다 많아야 1 만큼 크다. 예를 들어, $n=4, k=3$ 이면 1223은 RG함수이지만 1243은 셋째 자리수 4가 그 앞에 있는 수 1, 2보다 2이상 크므로 RG함수가 아니다.

예제 1.6.7 모든 RG함수 $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ 를 구하여라.

풀이>>

1111	1211	1223
1112	1212	1231
1121	1213	1232
1122	1221	1233
1123	1222	1234

□

문제 1.6.7

모든 RG 함수 $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2\}$ 를 구하여라.

정리 1.6.3

n 이 자연수일 때 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하자. 그러면 두 집합

$$\Gamma_n = \{f \mid f: [n] \rightarrow [n] \text{는 RG 함수}\},$$

$$\Pi_n = \{X \mid X \text{는 } [n] \text{의 분할}\}$$

사이에는 일대일 대응 함수가 존재한다. 따라서 모든 RG 함수 $f: [n] \rightarrow [n]$ 의 개수는 벨수 $B(n)$ 과 같다.

【증명】 $f = w_1 w_2 \dots w_n$ 이 Γ_n 의 원소일 때

$$S_i = f^{-1}(i) = \{j \in [n] \mid w_j = i\} \quad (i \neq \emptyset)$$

라 하고 함수 $\Phi: \Gamma_n \rightarrow \Pi_n$ 을

$$\Phi(f) = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$$

로 정의하자. 그러면 $S_i \cap S_j = \emptyset$ 이고 $\bigcup_{i=1}^k S_i = [n]$ 이므로 Φ 는 잘 정의된 함수이다. 이제 함수 Φ 가 일대일 대응 함수임을 보이기 위해 Φ 의 역함수를 만들어 보자. X 가 Π_n 의 원소일 때 X 의 블록을 아래 조건을 만족하도록 번호를 붙여 $X = \{S_1, S_2, \dots\}$ 로 나타내자.

$$1 \in S_1$$

$$\text{Min } \{i \mid i \in [n] - S_1\} \in S_2$$

$$\text{Min } \{i \mid i \in [n] - S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{j-1}\} \in S_j \quad (j=3, 4, \dots)$$

각 $i=1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $i \in S_j$ 이면 $v_i = j$ 로 v_i 를 정의하자. 그러면 $1 \in S_1$ 이므로 $v_1 = 1$ 이다.

이제 $2 \leq i \leq n$ 인 i 에 대하여

$$m = \text{Max}\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$$

이면 $\{1, 2, \dots, i-1\} \subseteq S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ 이고, i 는 $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ 의 원소이거나 집합 $[n] - S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ 의 가장 작은 원소이다.

$i \in S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ 이면 $v_i \leq m$ 이고, i 가 집합 $[n] - S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ 의 가장 작은 원소이면 $v_i = m+1$ 이 되어

$$v_i \leq \text{Max}\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\} + 1$$

이다. 따라서 $v_1 v_2 \dots v_n$ 은 RG 함수이다. 이를 이용하여 함수 $\Psi : \Pi_n \rightarrow \Gamma_n$ 을

$$\Psi(X) = v_1 v_2 \dots v_n$$

으로 정의하면 Ψ 는 Φ 의 역함수이고, Φ 는 집합 Γ_n 에서 Π_n 로 가는 일대일 대응 함수이다. □

예제 1.6.8 $n=9$ 라 하고 Φ 와 Ψ 를 정리 1.6.3에서 정의한 함수라 하자.

(1) $f=112342514$ 일 때 $\Phi(f)$ 를 구하여라.

(2) $X=\{\{1, 2, 5, 9\}, \{3\}, \{4, 8\}, \{6, 7\}\}$ 일 때 $\Psi(X)$ 를 구하여라.

풀이>> (1) $S_i = f^{-1}(i) = \{j \in [n] \mid f(j) = i\}$ 이므로

$$S_1 = f^{-1}(1) = \{1, 2, 8\}$$

$$S_2 = f^{-1}(2) = \{3, 6\}$$

$$S_3 = f^{-1}(3) = \{4\}$$

$$S_4 = f^{-1}(4) = \{5, 9\}$$

$$S_5 = f^{-1}(5) = \{7\}$$

이고, 따라서 $\Phi(f) = \{\{1, 2, 8\}, \{3, 6\}, \{4\}, \{5, 9\}, \{7\}\}$ 이다.

(2) 1을 포함하는 블록 $\{1, 2, 5, 9\}$ 가 S_1 이고 S_1 에 포함되지 않는 수 중 가장 작은 수 3을 포함하는 블록 $\{3\}$ 이 S_2 이다. 계속하여 S_1, S_2 에 포함되지 않는 수 중 가장 작은 수 4를 포함하는 블록 $\{4, 8\}$ 이 S_3 이며 S_1, S_2, S_3 에 포함되지 않는 수 중 가장 작은 수 6을 포함하는 블록 $\{6, 7\}$ 이 S_4 이다. 따라서 $\Psi(X) = v_1 v_2 \dots v_9$ 라 하면

$$v_1=v_2=v_5=v_9=1, v_3=2, v_4=v_8=3, v_6=v_7=4$$

이다. 즉, $\varphi(X)=112314431$ 이다. □

문제 1.6.8

$n=8$ 이라 하고 Φ 와 Ψ 를 정리 1.6.3에서 정의한 함수라 하자.

(1) $f=12231425$ 일 때 $\Phi(f)$ 를 구하여라.

(2) $X=\{\{1, 3, 6\}, \{4, 5\}, \{2, 7, 8\}\}$ 일 때 $\Psi(X)$ 를 구하여라.

지금까지 여러 가지 상황에서 일어나는 많은 세기의 방법에 대하여 알아보았다. 세기의 문제에서 흔히 나타나는 유형은 다음 예제와 같이 종합하여 정리할 수 있다.

예제 1.6.9 아래 표는 n 개의 공을 x 개의 상자에 넣는 방법의 수를 나타낸 표이다. (a)–(h)를 n 과 x 에 관한 기호나 수식으로 채워 이 표를 완성하여라.

(공의 수 : n , 상자 수 : x)

	조건 없음	각 상자에 많아야 하나 ($n \leq x$)	각 상자에 적어도 하나 ($n \geq x$)
공 : 구별 상자 : 구별	x^n	(a)	(b)
공 : 비구별 상자 : 구별	(c)	$\binom{x}{n}$	(d)
공 : 구별 상자 : 비구별	(e)	1	(f)
공 : 비구별 상자 : 비구별	(g)	1	(h)

표 1.6.2

풀이>> (a) ${}_xP_n$ (집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 에서 집합 $\{1, 2, \dots, x\}$ 로 가는 일대일 함수와 같다.)

(b) $x!S(n, x)$ (집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 에서 집합 $\{1, 2, \dots, x\}$ 로 가는 전사함수

와 같다.)

(c) ${}_xH_n$ (예제 1.3.7)

(d) ${}_xH_{n-x}$ (각 상자에 공을 하나씩 넣어 빈 상자가 없도록 한 후 (c)를 적용)

(e) $S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, x)$ (비어 있지 않은 상자 수가 k 라면

예제 1.6.2에 의하여 공을 넣는 방법의 수는 $S(n, k)$ 이며 k 는 $1, 2, \dots, x$ 중 하나임)

(f) $S(n, x)$ (예제 1.6.2)

(g) $p(n, 1) + p(n, 2) + \cdots + p(n, x)$ (비어 있지 않은 상자 수가 k 라면

예제 1.5.3에 의하여 공을 넣는 방법의 수는 $p(n, k)$ 이며 k 는 $1, 2, \dots, x$ 중 하나임)

(h) $p(n, x)$ (예제 1.5.3)



문제 1.6.9

아래는 n 개의 공을 n 개의 상자에 넣는 방법의 수를 나타낸 표이다. 빈 칸을 채워 이 표를 완성하여라.

(공의 수 : n , 상자 수 : n)

	조건 없음	각 상자에 많아야 한 개	각 상자에 적어도 한 개
공 : 구별 상자 : 구별	(a)	$n!$	(b)
공 : 비구별 상자 : 구별	(c)	$\binom{n}{n}$	(d)
공 : 구별 상자 : 비구별	(e)	1	(f)
공 : 비구별 상자 : 비구별	(g)	1	(h)
표 1.6.3			

>> 연습문제 1.6

1 $X=\{1, 2, \dots, 9\}$ 라 할 때 다음을 구하여라.

- (1) X 를 공집합이 아닌 세 집합으로 분할하는 방법의 수
- (2) X 를 각각 세 원소를 갖고 있는 세 집합으로 분할하는 방법의 수

2 $X=\{1, 2, \dots, 8\}, Y=\{a, b, c, d, e\}$ 라 할 때 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) X 에서 Y 로 가는 전사함수의 개수를 구하여라.
- (2) 치역이 세 원소로 이루어진 함수의 개수를 구하여라.

3 8명의 사람을 세 여관에 투숙하게 하는 경우의 수를 구하여라. (단, 어느 여관에도 적어도 한 명은 투숙함)

4 $30030=2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ 이다.

- (1) 30030을 1보다 큰 세 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수를 구하여라.
- (2) 30030을 세 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수를 구하여라.

5 $X=\{1, 2, \dots, 8\}$ 일 때 $A, B \subseteq X$ 이고 $A \cap B = \emptyset$ 인 A, B 를 뽑는 방법의 수를 구하여라.

6 집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 분할을 생각하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

- (1)
$$S(n, k) = \binom{n-1}{1} S(1, k-1) + \binom{n-1}{2} S(2, k-1) + \dots$$

$$+ \binom{n-1}{n-1} S(n-1, k-1)$$
- (2)
$$B(n) = \binom{n-1}{0} B(0) + \binom{n-1}{1} B(1) + \binom{n-1}{2} B(2) + \dots + \binom{n-1}{n-1} B(n-1)$$

(단, $B(0)=1$)

7 n 이 3보다 큰 자연수라 하자.

(1) $S(n, 3)$ 을 구하여라.

(2) n 이 짝수라면 $S(n, 3)$ 은 3의 배수임을 보여라.

8 $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$ 임을 보여라.

9 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = \sum_{i=1}^k S(k, i) i! \binom{n+1}{i+1}$$

10 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하자. $[n]$ 의 부분집합으로 이루어진 집합 Π 는 다음 성질을 만족한다.

모든 $A_i, A_j \in \Pi$ 에 대하여 $i \neq j$ 이면 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 이다.

(1) A 가 $[n]$ 의 부분집합이면 A 와 여집합 A^C 는 동시에 Π 의 원소가 될 수 없음을 보여라.

(2) Π 의 원소의 개수는 2^{n-1} 을 넘지 않음을 보여라.

(3) 원소의 개수가 2^{n-1} 인 Π 를 찾아라.

11 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하자. $1 \leq t \leq k$ 인 자연수 k 에 대하여 π_t 를 B_t 의 모든 원소로 이루어진 하나의 순열이라 할 때 순서조 $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ 의 개수는 $n! \binom{n-1}{k-1}$ 임을 보여라. 여기서 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 는 아래의 세 조건을 만족하는 집합이다.

(i) $A = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ 이고

(ii) $B_1, B_2, \dots, B_k \neq \emptyset$ 이며

(iii) $i \neq j$ 인 모든 i, j 에 대하여 $B_i \cap B_j = \emptyset$

12 n, k 가 자연수일 때 두 집합

$$\Gamma_{n,k} = \{f \mid f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \text{는 전사인 RG함수}\},$$

$$\Pi_{n,k} = \{X \mid X \text{는 } k \text{개의 블록을 갖는 } \{1, 2, \dots, n\} \text{의 분할}\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 집합 $\Gamma_{n,k}$ 의 원소의 수를 $S'(n, k)$ 라 할 때 $S'(1, 1), S'(2, 1), S'(2, 2)$ 의 값을 구하여라.
- (2) $S'(n+1, k) = S'(n, k-1) + kS'(n, k)$ 임을 보여라.
- (3) $S'(n, k)$ 는 제2종 스털링수 $S(n, k)$ 와 같음을 보여라.
- (4) 집합 $\Gamma_{n,k}$ 에서 $\Pi_{n,k}$ 로 가는 일대일 대응 함수를 찾아 $S'(n, k) = S(n, k)$ 임을 보여라.

13 아래는 9개의 공을 주어진 조건에 맞게 세 상자에 넣는 방법의 수를 나타낸 표이다. 빈 곳을 채워라.

	2개, 3개, 4개를 넣을 때	2개, 2개, 5개를 넣을 때	3개, 3개, 3개를 넣을 때
공 : 구별 상자 : 비구별			
공 : 구별 상자 : 구별			

제7절 포함배제의 원리

앞에서 우리는 세기의 기본이 되는 합의 법칙에 대하여 알아보았다. 이 절에서는 합의 법칙의 개념을 확장한 포함배제의 원리를 알아보고 이를 이용하여 해결할 수 있는 여러 문제를 살펴본다.

예제 1.7.1 1, 2, ..., 9를 일렬로 배열한 순열 중에서 첫째 자리가 2보다 크고 마지막 자리가 8보다 작은 것의 개수를 구하여라.

풀이>> U 를 1, 2, ..., 9로 이루어진 순열의 집합이라 하고 A 를 첫째 자리가 1 또는 2인 U 의 부분집합, B 를 마지막 자리가 8 또는 9인 U 의 부분집합이라 하면 구하는 수는 $|A^c \cap B^c|$ 이다.

한편, $|U|=9!$, $|A|=2 \cdot 8!$, $|B|=2 \cdot 8!$, $|A \cap B|=2 \cdot 2 \cdot 7!$ 이므로

$$\begin{aligned} |A^c \cap B^c| &= |(A \cup B)^c| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| \\ &= 9! - 2 \cdot 8! - 2 \cdot 8! + 2 \cdot 2 \cdot 7! \end{aligned}$$

이다. □

문제 1.7.1

정원이 50명인 어느 대학 수학과 2학년 중에서 이산수학을 수강하는 학생은 30명, 정수론을 수강하는 학생은 35명, 두 과목 모두를 수강하는 학생은 20명이라고 한다. 두 과목 모두 수강하지 않는 학생은 몇 명인가?

전체집합을 U 라 하고 A, B, C 를 U 의 부분집합이라 하면

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A^c \cap B^c| = |(A \cup B)^c| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

이고

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|$$

$$|A^c \cap B^c \cap C^c| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C|$$

이다.

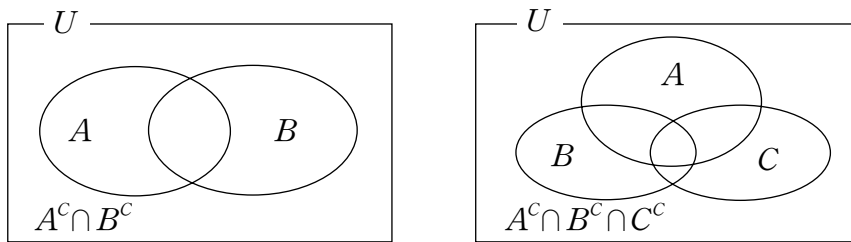


그림 1.7.1

예제 1.7.2 자연수 n 이 다음과 같이 소인수분해될 때

$$n = p^a q^b r^c \quad (p, q, r \text{은 서로 다른 소수이고, } a, b, c \text{는 자연수})$$

1부터 n 까지 자연수 중 n 과 서로 소인 자연수의 개수를 구하여라.

풀이>> 전체집합 $U = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고 U 의 세 부분집합 A_p, A_q, A_r 을

$$A_p = \{x \in U \mid x \text{는 } p \text{의 배수}\},$$

$$A_q = \{x \in U \mid x \text{는 } q \text{의 배수}\},$$

$$A_r = \{x \in U \mid x \text{는 } r \text{의 배수}\}$$

라 하면 구하는 수는 $|A_p^c \cap A_q^c \cap A_r^c|$ 이다.

한편 $|A_p|$ 는 $\frac{n}{p}$ 이고, $|A_q|$ 는 $\frac{n}{q}$ 이고, $|A_r|$ 는 $\frac{n}{r}$ 이다. 또,

$$|A_p \cap A_q| = \frac{n}{pq}, \quad |A_q \cap A_r| = \frac{n}{qr}, \quad |A_r \cap A_p| = \frac{n}{rp}$$

이며 $|A_p \cap A_q \cap A_r| = \frac{n}{pqr}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} |A^c \cap B^c \cap C^c| &= |U| - (|A| + |B| + |C|) \\ &\quad + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C| \\ &= n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r} \right) + \left(\frac{n}{pq} + \frac{n}{qr} + \frac{n}{rp} \right) - \frac{n}{pqr} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

이다. □

문제 1.7.2

70 이하의 자연수 중에서 70과 서로 소인 자연수의 개수를 구하여라.

집합 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 의 합집합 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 과 그 여집합 $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$ 의 원소의 수를 구하는 방법을 생각하여 보자.

정리 1.7.1 (포함배제의 원리) 전체집합을 U 라 하고 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 을 U 의 부분집합이라 하자. 그러면 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 의 합집합의 원소의 수는

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots + (-1)^{n+1} S_n \quad (7.1)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n |A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ S_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ S_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots \\ &\quad + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\vdots \\ S_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

이다.

또, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 의 여집합의 교집합의 원소의 개수는

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - \dots + (-1)^n S_n$$

이다.

【증명】 집합 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 의 한 원소 x 가 l 개의 집합 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_l}$ 에 속한다고 하자. 원소 x 가 등식 (7.1)의 오른쪽 항에서 몇 번 세어졌는지 생각해 보자.

원소 x 는 $S_1 = \sum_{1 \leq k \leq n} |A_k|$ 에서 l 번, $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$ 에서 $\binom{l}{2}$ 번 세어졌다. 일반적으로 x 는 S_t 에서 $\binom{l}{t}$ 번 세어지므로 (7.1)의 오른쪽 항에서 x 가 세어진 횟수는

$$\binom{l}{1} - \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - \dots + (-1)^{l+1} \binom{l}{k}$$

이다. 한편, 이항정리에 $x = -1$ 을 대입하면

$$\binom{l}{0} - \binom{l}{1} + \binom{l}{2} - \dots + (-1)^l \binom{l}{k} = (1-1)^l = 0$$

이므로

$$\binom{l}{1} - \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - \dots + (-1)^{l+1} \binom{l}{l} = \binom{l}{0} = 1$$

이다. 즉, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 의 한 원소 x 는 (7.1)의 왼쪽과 오른쪽 항에서 각각 한 번씩 세어졌다. 물론 U 의 한 원소 x 가 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 의 원소가 아니라면 x 는 (7.1)의 왼쪽과 오른쪽 항에서 각각 0번 세어지므로 U 의 모든 원소는 (7.1)의 왼쪽과 오른쪽 항에서 같은 수만큼 세어진다. 따라서

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots + (-1)^{n+1} S_n$$

이다. 한편, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 의 여집합의 교집합의 원소의 개수는

$$\begin{aligned} |A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c| \\ &= |U - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| \\ &= |U| - (S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots + (-1)^{n+1} S_n) \\ &= |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - \dots + (-1)^n S_n \end{aligned}$$

이다. □

예제 1.7.3 집합 $X=\{1, 2, \dots, n\}$ 에서 $Y=\{1, 2, \dots, k\}$ 로 가는 전사함수의 개수는

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

임을 보여라. 또

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n = n!$$

임을 보여라.

풀이>> 전체집합 $U=\{f \mid f: X \rightarrow Y \text{는 함수}\}$ 의 원소의 수 $|U|$ 는 $k^n = \binom{k}{0} k^n$ 이다.
 U 의 k 개의 부분집합 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 를

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f \in U \mid 1 \notin f(X)\}, \\ A_2 &= \{f \in U \mid 2 \notin f(X)\}, \\ &\vdots \\ A_k &= \{f \in U \mid k \notin f(X)\} \end{aligned}$$

라 하면 구하는 전사함수의 개수는 $|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_k^c|$ 이다.

한편, A_1 은 집합 X 에서 집합 $\{2, 3, \dots, k\}$ 로 가는 함수의 집합이므로 $|A_1| = (k-1)^n$ 이고 마찬가지로 $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_k| = (k-1)^n$ 이다. 따라서

$$S_1 = \sum_{i=1}^k |A_i| = k(k-1)^n = \binom{k}{1} (k-1)^n$$

이다.

또 $A_1 \cap A_2$ 는 X 에서 $\{3, 4, \dots, k\}$ 로 가는 함수의 집합이므로 $|A_1 \cap A_2| = (k-2)^n$ 이다. 마찬가지로 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 의 두 집합의 교집합의 원소의 수도 모두 $(k-2)^n$ 임을 알 수 있다. 이런 두 집합의 교집합은 $\binom{k}{2}$ 개 있으므로

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \binom{k}{2} (k-2)^n$$

이다.

일반적으로 $1 \leq t \leq k$ 인 t 에 대하여

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t$ 는 X 에서 집합 $\{t+1, t+2, \dots, k\}$ 로 가는 함수의 집합이므로 $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = (k-t)^n$ 이다.

같은 방법으로 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 중 t 개의 교집합의 원소의 개수는 모두 $(k-t)^n$ 이다. 이런 t 개의 교집합은 $\binom{k}{t}$ 개 있으므로

$$S_t = \binom{k}{t} (k-t)^n$$

이다. 따라서 포함배제의 원리에 의하여

$$\begin{aligned} |A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_k^c| &= |U| - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^k S_k \\ &= \binom{k}{0} k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} (k-k)^k \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

이다. 한편 $k=n$ 이면 X 에서 Y 로의 전사함수는 일대일 함수이고 그 개수는 $n!$ 이므로

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n = n!$$

이다. □

문제 1.7.3

포함배제의 원리를 이용하여 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{a, b, c\}$ 으로 가는 전사함수의 개수를 구하여라.

예제 1.6.5에서 n -집합에서 k -집합으로 가는 전사함수의 수는 $k!S(n, k)$ 임을 알았다. 이 사실과 예제 1.7.3에 의하여 제2종 스털링수 $S(n, k)$ 는

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

임을 알 수 있다.

예제 1.7.4 n 쌍의 문자 $a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n$ 을 일렬로 배열할 때 같은 문자는 연속되지 않도록 배열하는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> n 쌍의 문자 $a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n$ 으로 이루어진 모든 순열의 집합을 U 라 하면 U 의 원소의 개수는

$$|U| = \frac{(2n)!}{2!2!\cdots 2!} = \frac{(2n)!}{(2!)^n} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

이다. $1 \leq i \leq n$ 인 자연수 i 에 대하여 A_i 를 a_i 가 연속으로 배열되는 U 의 부분 집합이라 하자. 그러면 구하는 방법의 수는 $|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c|$ 이다.

한편,

$$|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_n| = \frac{(2n-1)!}{(2!)^{n-1}},$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \cdots = |A_{n-1} \cap A_n| = \frac{(2n-2)!}{(2!)^{n-2}},$$

$\vdots$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}| = |A_1 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n| = \cdots = \frac{(n+1)!}{2!},$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = n!$$

이므로

$$S_1 = \binom{n}{1} \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}},$$

$$S_2 = \binom{n}{2} \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}},$$

$\vdots$

$$S_{n-1} = \binom{n}{n-1} \frac{(n+1)!}{2},$$

$$S_n = \binom{n}{n} n!$$

이다. 따라서 포함배제의 원리에 의하여

$$\begin{aligned}
 |A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c| &= |U| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n \\
 &= \frac{(2n)!}{2^n} - \binom{n}{1} \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} + \binom{n}{2} \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} n! \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (2n-i)! 2^i
 \end{aligned}$$

이다. □

문제 1.7.4

6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 같은 문자는 연속되지 않도록 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하여라.

예제 1.7.5 일대일대응 함수 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 중에서

$$f(i) \neq i, (i=1, \dots, n)$$

인 함수 f 의 개수 D_n 을 구하여라.

풀이>> U 를 모든 일대일대응 함수 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 의 집합이라 하면 $|U| = n!$ 이다. 이제 $1 \leq i \leq n$ 인 자연수 i 에 대하여

$$A_i = \{f \in U \mid f(i) = i\} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

이라 하면 구하는 수 D_n 은 $|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c|$ 이다.

한편

$$\begin{aligned}
 |A_1| &= |A_2| = \cdots = |A_n| = (n-1)!, \\
 |A_1 \cap A_2| &= |A_1 \cap A_3| = \cdots = |A_{n-1} \cap A_n| = (n-2)!, \\
 &\vdots \\
 |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}| &= |A_1 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n| = \cdots = |A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n| = 1!, \\
 |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| &= 0!
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
S_1 &= \binom{n}{1}(n-1)!, \\
S_2 &= \binom{n}{2}(n-2)!, \\
&\vdots \\
S_{n-1} &= \binom{n}{n-1}1!, \\
S_n &= \binom{n}{n}0!
\end{aligned}$$

이다. 따라서 포함배제의 원리에 의하여

$$\begin{aligned}
D_n &= |A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c| \\
&= |U| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n \\
&= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}0! \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! \\
&= n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}
\end{aligned}$$

이다. □

문제 1.7.5

일대일대응 함수 $f = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 중에서

$$f(i) \neq i \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

인 f 의 개수 D_5 를 구하여라.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ 이 U 의 부분집합이라 하자. 지금까지의 포함배제의 원리를 이용한 문제에서는 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 의 k 개의 교집합은 모두 원소의 개수가 같았다. 즉,

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| = \cdots = |A_{n-k+1} \cap A_{n-k+2} \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n|$$

이었다. 이제 두 교집합의 원소의 개수가 달라지는 예를 살펴보도록 하자.

예제 1.7.6 아래 그림에서 점 X_1, X_2, X_3, X_4 를 n 가지 색으로 색칠하려 한다. 두 점이 선분으로 연결되어 있으면 서로 다른 색이 되도록 색칠할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

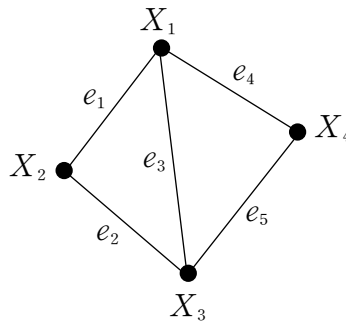


그림 1.7.2

풀이>> N 을 n 가지 색으로 점 X_1, X_2, X_3, X_4 를 색칠할 수 있는 모든 방법의 집합이라 하면 $|N| = n^4$ 이다. 각 $i=1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여 A_i 를 선분 e_i 의 양 끝점이 같은 색이 되도록 색칠하는 방법의 집합이라 하면 구하는 경우의 수는 $|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c|$ 이다. 한편 $|A_1|$ 은 점 X_1 과 X_2 를 같은 색이 되도록 색칠하는 방법의 수이므로 $|A_1| = n^3$ 이고 마찬가지로 $|A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = n^3$ 이 되어

$$S_1 = \sum_{i=1}^5 |A_i| = \binom{5}{1} n^3$$

이다. 같은 방법으로 $|A_i \cap A_j| = n^2 (i \neq j)$ 이고

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| = \binom{5}{2} n^2$$

이다. 한편 세 집합 A_i, A_j, A_k 의 교집합의 원소의 개수는 연관되어 있는 선분에 따라 달라진다. 즉, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4 \cap A_5| = n^2$ 이고 그 외의 A_i, A_j, A_k 에 대해서는 $|A_i \cap A_j \cap A_k| = n$ 이므로

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \left(\binom{5}{3} - 2 \right) n + 2n^2$$

이다. 넷 또는 다섯의 A_i 의 교집합의 원소의 수는 모든 점을 같은 색으로 색칠 하여야 하므로 모두 n 이고, 따라서 $S_4 = \binom{5}{4}n$, $S_5 = \binom{5}{5}n$ 이다. 그러므로 구 하는 수는 포함배제의 원리에 의하여

$$\begin{aligned} |A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_5^c| &= |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 \\ &= n^4 - 5n^3 + 10n^2 - (8n + 2n^2) + 5n - n \\ &= n^4 - 5n^3 + 8n^2 - 4n \end{aligned}$$

이다. □

문제 1.7.6

1000 이하의 자연수 중에서 2, 3, 5 또는 7의 배수가 아닌 수의 개수를 구하여라.

>> 연습문제 1.7

- 1 아홉 개의 숫자 $1, 2, \dots, 9$ 를 일렬로 배열한 순열 중에서 홀수로 시작되거나 홀수로 끝나는 것의 개수를 구하여라.
- 2 $1, 2, \dots, 9$ 로 이루어진 순열 중에서 $123, 456, 789$ 중 적어도 하나를 포함하는 순열의 수를 구하여라.
- 3 집합 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2\}$ 로 가는 전사함수의 개수를 구하여라.
- 4 숫자 $1, 2, 3$ 으로 이루어진 n 자리 수 중에서 각각 $1, 2, 3$ 을 적어도 한번 포함하는 수의 개수를 구하여라.
- 5 정 n 각형의 꼭지점을 연결하여 삼각형을 만들려고 한다. (단, $n \geq 4$)
 - (1) 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.
 - (2) 정 n 각형의 오직 한 변을 포함하는 삼각형의 개수를 구하여라.
 - (3) 정 n 각형의 오직 두 변을 포함하는 삼각형의 개수를 구하여라.
 - (4) 정 n 각형의 변을 포함하지 않는 삼각형의 개수를 구하여라.
- 6 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 23$ 에 대하여 다음을 구하여라.
 - (1) 음이 아닌 정수해의 개수
 - (2) 각 x_i 가 8을 넘지 않는 음이 아닌 정수해의 개수
- 7 9999 이하의 자연수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 25인 수의 개수를 구하여라.

8 자연수 $1, 2, \dots, n$ 을 일렬로 배열할 때 어떠한 $k+1$ 도 k 바로 뒤에는 나오지 않는 경우의 수를 구하여라. (단, $1 \leq k \leq n-1$)

9 영수는 n 명의 친구에게 서로 다른 n 통의 편지를 쓰고 n 개의 편지봉투에 각각 친구의 주소를 썼다. n 개의 편지를 임의로 봉투에 넣을 때 모두 그 주소가 틀릴 확률 p_n 을 구하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = e^{-1}$ 임을 보여라. 단

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

10 일대일대응 함수 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 중에서

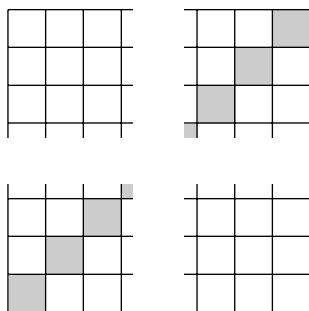
$$f(i) \neq i, (i=1, 2, \dots, n)$$

인 함수 f 의 개수를 D_n 이라 하자.

- (1) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ 임을 보여라.
- (2) 위 (1)을 이용하여 $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ 임을 보여라.
- (3) 위 (2)를 이용하여 $n=8$ 까지 D_n 의 값을 구하여라.

11 아래 그림과 같이 가로, 세로가 각각 n 칸인 판에서 어두운 부분을 제외한 칸에 n 개의 검은색 바둑돌을 놓을 때 같은 행이나 같은 열에 두 개 이상의 바둑돌이 오지 않도록 놓는 방법의 수를 구하여라.

12 아래 그림과 같은 가로, 세로가 각각 4칸인 판에서 어두운 부분을 제외한 칸에



4개의 검은색 바둑돌을 놓으려 한다. 포함배제의 원리를 이용하여 같은 행이나 같은 열에는 두 개 이상의 바둑돌이 놓이지 않도록 놓는 방법의 수를 구하여라.

4				
3				
2				
1				
	1	2	3	4

13 파티에 참석하고 있는 n 쌍의 부부가 있다. 이 n 쌍의 부부가 원탁에 앉을 때 어느 부부도 이웃하지 않게 앉은 방법의 수를 구하여라.

14 파티에 참석하고 있는 n 쌍의 부부가 있다. 먼저 n 명의 부인이 원탁에 한 칸씩 건너 앉아 있다. n 명의 남편이 자기 아내의 좌우에는 앉지 않고 부인들 사이에 앉을 수 있는 방법의 수 $E(n)$ 을 구하여라.

15 자연수 n 이 다음과 같이 소인수분해될 때

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$$

($p_1, p_2, \dots, p_r$ 은 서로 다른 소수이고, $a_1, a_2, \dots, a_r$ 은 자연수)

1부터 n 까지 자연수 중 n 와 서로 소인 자연수의 개수 $\varphi(n)$ 을 구하여라.

제8절 비둘기집의 원리

일상생활에서 흔히 쓰이는 단순한 원리들이 수학의 여러 가지 흥미로운 문제를 해결하는 데 자주 쓰이는 것들이 있다. 그런 것들 중의 하나가 비둘기집의 원리(Pigeonhole principle)이다. 구두 상자의 원리라고도 불려지는 이 원리는 비둘기집의 수보다 비둘기 수가 더 많다면 어떤 비둘기집에는 두 마리 이상의 비둘기가 있어야 한다는 것으로 실제로 일상생활에서도 자주 쓰이곤 한다. 이 절에서는 비둘기집의 원리를 증명하고 이것을 이용하여 해결할 수 있는 응용문제를 살펴본다.

예제 1.8.1 서울 시민 중에는 머리카락의 수가 같은 두 사람이 있음을 보여라.

풀이>> 사람의 머리카락 수는 삼십만 이하이므로 서울 시민의 머리카락의 수가 모두 다르다면 서울 시민의 수도 삼십만 이하여야 한다. 그러나 서울 시민의 수는 천만을 넘는다. 따라서 서울 시민 중 적어도 두 사람은 똑같은 수의 머리카락을 갖고 있다. □

문제 1.8.1

13명의 중에는 같은 달에 생일이 있는 두 사람이 있음을 보여라.

정리 1.8.1 (비둘기집의 원리)

$n+1$ 마리의 비둘기가 n 개의 비둘기집에 들어갔다면 적어도 한 비둘기집에는 2마리 이상의 비둘기가 있다.

[증명] 각각의 비둘기집에 많아야 한 마리의 비둘기가 있다고 하자. 그러면 비둘기집에 들어간 비둘기 수는 많아야 n 마리이다. 그런데 비둘기는 $n+1$ 마리이므로 모순이다. 그러므로 적어도 한 비둘기집에는 두 마리 이상의 비둘기가 있다. □

예제 1.8.2 m 개의 정수 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 이 주어져 있다. 이 중 어떤 연속된 항의 합은 m 의 배수가 됨을 보여라.

풀이>> 각 $1 \leq i \leq m$ 에 대하여 $b_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ 라고 하자. b_i 를 m 으로 나눈 나머지를 r_i 라고 하면

$$0 \leq r_i \leq m-1, i=1, \dots, m$$

이다.

- ① 적어도 한 $r_j = 0$ 이면 b_j 는 m 의 배수이다. 따라서, 연속된 항 $a_1, a_2, \dots, a_j$ 의 합은 m 의 배수이다.
- ② $r_1, r_2, \dots, r_m$ 중 어느 수도 0이 아니면 모든 r_i 는 1에서 $m-1$ 사이의 수이고 그 개수는 m 이므로 비둘기집의 원리에 의하여 $r_1, r_2, \dots, r_m$ 중에는 적어도 같은 두 수 r_p, r_q ($p < q$)가 있다. 따라서 b_p 와 b_q 를 m 으로 나눈 나머지는 같고 그 차

$$b_q - b_p = a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_q$$

는 m 의 배수이다.

따라서 어떤 경우에도 항의 합이 m 의 배수가 되는 연속된 항이 있다. □

문제 1.8.2

50 이하의 자연수 중에서 10개를 뽑아 만든 집합을 A 라 하자. 집합 A 에는 각각 4개의 원소를 가지며 각 원소의 합이 같은 두 부분집합 C, D 가 있음을 보여라.

예제 1.8.3 서로 다른 52개의 정수를 포함하고 있는 집합을 A 라 하자.

- (1) 집합 A 에는 두 수의 합이나 차가 100의 배수인 두 수가 있음을 보여라.
- (2) 두 수의 합이나 차가 100의 배수가 되지 않도록 51개의 정수를 뽑아라.

풀이>> (1) 집합 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{52}\}$ 라 하자. $i=1, 2, \dots, 52$ 에 대하여

$$a_i = 100q_i + b_i \quad (q_i, b_i : \text{정수}, 0 \leq b_i \leq 99)$$

로 나타낼 수 있다.

① 어떤 b_i 와 b_j 가 $b_i = b_j (i \neq j)$ 이면

$$a_i - a_j = (100q_i + b_i) - (100q_j + b_j) = 100(q_i - q_j)$$

이므로 두 수 a_i 와 a_j 의 차는 100의 배수이다.

② 모든 b_i 가 다르면 $b_1, b_2, \dots, b_{52}$ 는 다음 51개 집합

$$\{0\}, \{1, 99\}, \{2, 98\}, \{3, 97\}, \dots, \{49, 51\}, \{50\} \quad (8.1)$$

중 하나에 속해야 한다. 52개의 수가 51개의 집합에 속하므로 비둘기집의 원리에 의해 어떤 두 수 $b_i, b_j (i \neq j)$ 는 같은 집합에 속한다. $b_i \neq b_j$ 이므로 b_i, b_j 는

$$\{1, 99\}, \{2, 98\}, \{3, 97\}, \dots, \{49, 51\}$$

중 하나의 집합에 속한다. 곧 $b_i + b_j = 100$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} a_i + a_j &= (100q_i + b_i) + (100q_j + b_j) \\ &= 100(q_i + q_j) + (b_i + b_j) \\ &= 100(q_i + q_j + 1) \end{aligned}$$

이므로 두 수 a_i 와 a_j 의 합은 100의 배수이다.

(2) 위 (8.1)에 있는 51개 집합에서 한 원소씩 꺼내면 된다. 예를 들어

$$\{0, 1, 2, \dots, 49, 50\}, \{0, 99, 98, \dots, 51, 50\}$$

등은 두 수의 합이나 차가 100의 배수가 되지 않는 정수의 집합이다. □

문제 1.8.3

200 이하의 자연수의 집합을 A 라 하자.

(1) A 에서 임의로 101개의 원소를 꺼내면 그 안에는 한 수가 다른 수의 배수인 두 수가 있음을 보여라.

(2) A 에서 어떤 수도 다른 수의 배수가 되지 않도록 100개의 원소를 뽑아라.

예제 1.8.4 어느 모임에 참가한 n 명 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 이 전부 서로 알고 있는 사람의 수를 각각 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이라 하자. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중에는 같은 두 수가 있음을 증명하여라.

풀이>> 모든 $i (1 \leq i \leq n)$ 에 대하여 $0 \leq a_i \leq n-1$ 이며 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- ① 만약 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중 어느 것도 0이 아닌 경우: $a_1, a_2, \dots, a_n$ 은 모두 1부터 $(n-1)$ 까지의 수이고 그 개수는 n 이므로 비둘기집의 원리에 의하여 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중 적어도 같은 두 수가 있다.
- ② $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중에 0이 있는 경우: 예를 들어 a_1 이 0이라 하면 A_1 은 그 어느 누구와도 서로 알지 못하므로 어느 $A_j (2 \leq j \leq n)$ 도 A_1 과는 알지 못한다. 곧 a_j 는 $(n-1)$ 이 될 수 없다. 그러므로 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 은 모두 0부터 $(n-2)$ 까지의 수므로 다시 비둘기집의 원리에 의하여 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중 적어도 같은 두 수가 있다.

따라서 어떤 경우에도 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중에는 적어도 같은 두 수가 있다. □

문제 1.8.4

임의의 $n+1$ 개 정수 중에는 두 정수의 차가 n 의 배수가 되는 두 수가 있음을 보여라.

예제 1.8.5 원탁에 n 명의 손님이 앉을 자리가 명찰과 함께 놓여있다. n 명의 손님이 명찰을 확인하지 않고 아무렇게나 앉았더니 제자리에 앉은 손님이 한 사람도 없었다. 이 때, 명찰이 놓인 원탁을 적당히 회전시키면 어느 시점에서는 적어도 2명의 손님이 제자리에 앉게됨을 보여라.

풀이>> 처음에 앉았던 자리에서 원탁을 한 자리씩 돌리자. 처음에 아무도 제자리에 앉은 사람이 없으므로 $(n-1)$ 번 돌리는 동안에 모든 사람은 꼭 한 번만 자기 자리 앞에 자기의 명찰이 돌아온다. 즉, $(n-1)$ 번 돌리는 동안 손님이 제자리에 앉은 경우는 n 번이므로 비둘기집의 원리에 의하여 어느 시점에서는 적어도 한

번은 두 사람이 제자리에 앉게 되는 경우가 있다. □

문제 1.8.5

n 을 양의 정수라 하자. n 의 배수 중에는 십진법 $55\cdots 50\cdots 0$ 인 형태의 수가 있음을 보여라.

예제 1.8.6 어떤 운동선수는 11주간(77일)동안 매일 한 번 이상, 일주일에 12번 이하로 연습한다고 한다. 이 선수가 연속으로 며칠 동안 연습한 횟수의 합이 21이 되는 경우가 있음을 보여라.

풀이>> 첫날부터 i 째 날까지 연습한 회수의 총합을 a_i 라 하자. 매일 한 번 이상 연습하고 일주일에 12번 이하만 연습하므로

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{76} < a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$$

이다. 다음과 같은 154개의 자연수

$$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21 \quad (8.2)$$

를 생각하여 보자. $a_1+21 < a_2+21 < \cdots < a_{77}+21 \leq 153$ 이므로 (8.2)에 있는 154개의 수는 모두 153 이하인 자연수이다. 따라서 비둘기집의 원리에 의하여 이들 중 적어도 두 수는 같다. 한편, $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 는 서로 다르고 $a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21$ 도 서로 다르다. 결국 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 중의 한 수 a_q 가 $a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21$ 중의 한 수 a_p+21 과 같아야 한다. 따라서 $a_q - a_p = 21$ 이고 $(p+1)$ 째 날부터 q 째 날까지 연습한 회수는 꼭 21회이다. □

문제 1.8.6

위의 예제 1.8.6에서 이 선수가 연속으로 며칠 동안 연습한 횟수의 합이 15회가 되는 경우가 있음을 보여라.

두 비둘기집에 다섯 마리의 비둘기가 들어가면, 어느 한 집에는 반드시 세 마리 이상의 비둘기가 있게 된다. 이 사실을 보여주는 일반화된 비둘기집의 원리를 알아보자.

정리 1.8.2 (일반화된 비둘기집의 원리)

n 개의 비둘기 집에 m 마리의 비둘기가 들어갔다면 적어도 한 집에는 $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ 마리 이상이 있다. 여기서 $\lceil x \rceil$ 는 x 보다 크거나 같은 정수 중에서 최소를 뜻한다.

【증명】 만약 모든 n 개의 집에 $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ 마리 미만이 들어갔다면 비둘기의 수 m 은

$$m \leq n(\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1) < n\left(\left(\frac{m}{n} + 1\right) - 1\right) = m$$

이 되어 모순이다. 그러므로 적어도 한 집에는 $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ 마리 이상의 비둘기가 있다. □

예제 1.8.7 100명 가운데 적어도 15명은 같은 요일에 태어났음을 보여라.

풀이>> 7개의 요일에 100명의 생일이 있어야 하므로 정리 1.8.2에 의하여 적어도 한 요일에는 $\lceil \frac{100}{7} \rceil = 15$ 명 이상의 생일이 있다. □

문제 1.8.7

67명 가운데 어떤 i 달에는 i 명 이상의 생일이 있음을 보여라. ($1 \leq i \leq 12$)

예제 1.8.8 한 변의 길이가 1인 정사각형 안에 19개의 점을 임의로 잡을 때 그 중에는 넓이가 $\frac{1}{18}$ 이하인 삼각형의 꼭지점을 이루는 세 점이 있음을 보여라. 단, 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않다.

풀이>> 한 변의 길이가 1인 정사각형을 다음 그림처럼 한 변의 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 9개의 작은 정사각형으로 나누어 보자.

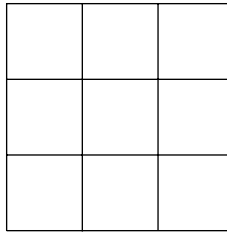


그림 1.8.1

이제 9개의 작은 정사각형에 19개의 점이 있어야 하므로 정리 1.8.2에 의하여 어떤 정사각형에는 $\lceil \frac{19}{9} \rceil = 3$ 개 이상의 점이 있다. 그 중 세 점이 이루는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

이하이다. □

문제 1.8.8

한 변의 길이가 2인 정사각형 안에 5개의 점을 임의로 잡을 때 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이하인 두 점이 있음을 보여라.

예제 1.8.9 어떤 바둑전문기사는 하루 한 번 이상 바둑을 두는데 20일 동안 둔 바둑 횟수는 30회를 넘지는 않는다. 그러면 연속으로 며칠 동안 둔 바둑 횟수의 합이 7인 기간이 적어도 3번 있음을 보여라.

풀이>> 이 기사가 첫 날 둔 바둑 횟수를 a_1 , 둘째 날까지 둔 바둑 횟수를 $a_2, \dots, 20$ 일 동안 둔 바둑 횟수를 a_{20} 이라 하자. 그러면 매일 바둑을 두었으나 30회를 넘지 않았으므로

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{19} < a_{20} \leq 30$$

이고 또

$$8=1+7 \leq a_1+7 < a_2+7 < \cdots < a_{19}+7 < a_{20}+7 \leq 30+7=37$$

이다. 그러므로 40개의 수

$$a_1, a_2, \cdots, a_{20}, a_1+7, a_2+7, \cdots, a_{19}+7, a_{20}+7 \quad (8.3)$$

는 모두 1부터 37까지의 자연수이므로 비둘기집의 원리에 의하여

$$a_j = a_i + 7 \quad (1 \leq i < j \leq 20)$$

인 서로 다른 a_i, a_j 가 있다. $a_j - a_i = 7$ 이므로 $a_{i+1}, \cdots, a_j$ 동안 바둑둔 횟수는 7이다. 또, 위 (8.3)에서 a_j 와 a_i+7 을 제외하면 나머지는 많아야 36개의 자연수이므로 다시 같아지는 두 쌍의 수가 있다. 그러므로 이 기사가 연속으로 며칠 동안 둔 바둑 횟수의 합이 7인 기간이 적어도 3번 있다. $\square$

문제 1.8.9

공간에 어느 세 점도 일직선에 있지 않은 6개의 점이 있다고 하자. 이 점들에 의하여 결정되는 15개의 선분을 빨강 또는 노랑으로 모두 색칠한다고 하면 같은 색을 가진 삼각형이 적어도 5개 있음을 보여라. 같은 색을 가진 삼각형이란 한 삼각형의 변이 빨강, 노랑, 빨강이면 다른 삼각형의 변도 빨강, 노랑, 빨강임을 뜻한다.

예제 1.8.10 피보나치수열 $\{F_n\}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

즉, 피보나치수열은

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

이다. 피보나치수열에는 1보다 큰 임의의 자연수 m 으로 나누면 나머지가 각각 1이 되는 연속된 두 항 F_n, F_{n+1} 이 있음을 보여라. (단, $n > 1$)

풀이>> 피보나치수열 F_n 을 m 으로 나눈 나머지를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 연속된 두 항으로 이루어진 (m^2+1) 개의 순서쌍

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), \dots, (a_{m^2+1}, a_{m^2+2})$$

를 생각하여 보자. $0 \leq a_i \leq m-1$ 이므로 위의 순서쌍은 많아야 m^2 개만 다를 수 있다. 따라서 비둘기집의 원리에 의해

$$(a_i, a_{i+1}) = (a_j, a_{j+1})$$

인 $i, j (i < j)$ 가 있다. $j = i+1$ 이면

$$a_i = a_{i+1} = a_{i+2}, \quad a_i + a_{i+1} \equiv a_{i+2} \pmod{m}$$

이므로 $a_i = a_{i+1} = a_{i+2} = 0$ 이다. 따라서 모든 $a_k = 0$ 이다. 이것은 $a_1 = 1$ 에 모순이다. 따라서 $j \neq i+1$ 이고 순서쌍의 수열

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), \dots$$

은 $(a_i, a_{i+1}), (a_{i+1}, a_{i+2}), \dots, (a_{j-1}, a_j)$ 이 주기적으로 반복되는 수열이다. 이 주기 안에 $(1, 1)$ 이 나타나므로 사실상 무한히 많은 $(1, 1)$ 이 있다. 예를 들어 $m=3$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 $\underline{1}, \underline{1}, 2, 0, 2, 2, 1, 0, \underline{1}, \underline{1}, 2, 0, \dots$ 이다. □

문제 1.8.10

n 을 임의의 자연수라 하자. 그러면 피보나치수열에는

$$a \times 10^n \quad (a \text{는 자연수})$$

의 꼴이 되는 항이 있음을 보여라.

>> 연습문제 1.8

1 8명 중 적어도 두 명은 같은 요일이 생일임을 보여라.

2 17명 중 3명은 같은 요일이 생일임을 보여라.

3 한 변의 길이가 1인 정사각형 안에 9개의 점을 임의로 잡을 때 이 아홉 개의 점 중 3개의 점은 면적이 $\frac{1}{8}$ 이하인 삼각형의 꼭지점임을 보여라. 단, 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않다.

4 다음 물음에 답하여라.

- (1) 수직선에 좌표가 정수인 세 점이 있다. 이 점들을 잇는 선분들의 중점 중 적어도 하나는 좌표가 정수임을 보여라.
- (2) 평면에 x, y 좌표가 모두 정수인 다섯 점이 있다. 이 점들을 잇는 선분들의 중점 중 적어도 하나는 좌표값이 모두 정수임을 보여라.
- (3) 공간에 x, y, z 좌표가 모두 정수인 아홉 점이 있다. 이 점들을 잇는 선분들의 중점 중 적어도 하나는 좌표값이 모두 정수임을 보여라.

5 다음 물음에 답하여라.

- (1) 한 변의 길이가 1인 정삼각형 안에 10개의 점을 임의로 잡을 때 두 점 사이의 거리가 $\frac{1}{3}$ 이하인 두 점이 있음을 보여라.
- (2) 한 변의 길이가 1인 정삼각형 안에 n^2+1 개의 점을 임의로 잡을 때 두 점 사이의 거리가 $\frac{1}{n}$ 이하인 두 점이 있음을 보여라.

6 16명의 학생이 월요일부터 금요일까지 각자 하루나 이틀을 정하여 수영한다. 이 때, 같은 요일에 수영하는 두 학생이 있음을 보여라.

7 평면에서 6개의 원이 모두 한 점을 지난다고 하면 이들 중 한 원은 다른 원의 반지름이 되는 선분을 내부에 포함하고 있음을 보여라.

8 7 이하의 자연수 중 5개로 이루어진 집합을 X 라 하자. 집합 X 에는 각 원소의 합이 같게 되는 서로 소인 두 부분집합 A, B 가 있음을 보여라. (단, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$) 예를 들어 $X = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ 이면 $A = \{1, 5\}, B = \{6\}$ 이 있다.

9 부채꼴 모양으로 200등분한 크기가 다른 두 장의 레코드판이 있다. 큰 레코드판의 부채꼴 모양 중 100개는 빨간 색으로 그 나머지는 파란색으로 칠하고, 작은 레코드판의 부채꼴은 임의로 빨간 색 또는 파란색으로 칠한다고 한다. 큰 레코드판 위에 작은 레코드판의 중심을 일치시키고 작은 레코드판을 적당히 회전시키면 작은 레코드판의 부채꼴 모양 중 적어도 100개 이상의 색깔이 큰 레코드판의 부채꼴의 색깔과 같음을 보여라.

10 임의의 $n+2$ 개의 정수들 중에는 차나 합이 $2n$ 의 배수가 되는 두 수가 있음을 보여라.

11 100 이하의 자연수 중에서 10개를 뽑아 만든 집합을 A 라 하자. 그러면 A 에는 공집합이 아니고 서로 소이며 원소의 합이 같은 두 부분집합이 있음을 보여라.

12 어느 한 팀이 10일 동안 15게임을 치루는 데 매일 적어도 한 게임을 한다. 이 팀이 연속으로 며칠 동안 치룬 게임의 총수가 4가 되는 경우가 있음을 보여라.

13 어떤 학생이 시험에 대비하여 37일 동안 매일 한 시간 이상, 모두 60시간은 넘지 않게 공부하려고 한다. 이 학생이 연속으로 며칠 동안 공부한 시간을 합하면 꼭 13시간이 되는 경우가 있음을 보여라.

14 집합 $A=\{1, 2, \dots, 2n\}$ 이라고 하자. A 에서 임의로 $n+1$ 개의 원소를 뽑으면 그 중에는 서로 소인 두 수가 있음을 보여라.

15 자연수 n 의 일의 자리수는 1, 3, 7 또는 9이다. n 의 배수 중에는 십진법으로

$$11 \cdots \cdots 1$$

의 꼴인 수가 있음을 보여라. 예를 들어 3의 배수 중에는 111이 있다.

16 아래의 행렬 A 는 서로 다른 mn 개의 실수로 이루어져 있으며 각 행은 오른쪽으로 갈수록 점점 커진다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

이 행렬의 각 열을 밑으로 갈수록 커지게 재배열하면 행도 오른쪽으로 갈수록 점점 커짐을 보여라.

17 $1, 2, \dots, 2n$ 에서 $n+1$ 개의 수를 택하면 그 중 한 수가 다른 수의 배수가 되는 두 수가 있음을 보여라.

18 자연수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$, $n \geq 1$ 이 다음 두 가지 성질을 갖는다.

(i) $a_n < a_{n+1}$

(ii) $a_{n+1} \leq 2n$

이 때, 임의의 자연수 k 에 대하여 어떤 두 항의 차가 k 가 될 수 있음을 보여라.

19 $n^2 + 1$ 개의 서로 다른 실수로 이루어진 수열에는 길이가 $n+1$ 이상인 증가하는 부분수열이 있거나 길이가 $n+1$ 이상인 감소하는 부분수열이 있음을 보여라.

20 n 을 10과 서로 소인 자연수라고 하자. n 의 거듭제곱 $n, n^2, n^3, \dots$ 중에는 십진법으로

$$a_1 \cdots a_k 00 \cdots 001 \quad (\text{단, } 0 \text{의 개수는 } n-1 \text{개})$$

의 꼴인 수가 있음을 보여라.

21 5개의 서로 다른 실수 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 중에는

$$0 < \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} < 1$$

를 만족하는 두 수 y_i, y_j 가 있음을 보여라.

22 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여

$$0 < |a + b\sqrt{2}| < \epsilon$$

을 만족하는 두 정수 a, b 가 있음을 보여라.